# Die rechnerische Bearbeitung

der

# Messungen von Monddistanzen.

Von

Kurt Hessen.

Kiel 1905.

Druck von C. Schaidt.

# Die rechnerische Bearbeitung der Messungen von Monddistanzen.

---

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

genehmigt

von der Philosophischen Fakultät
der Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin.

Von

Kurt Hessen

aus Thorn a. W.

ACAD LUCERNE BIBL.

Tag der Promotion: 30. September 1905.

Referenten:

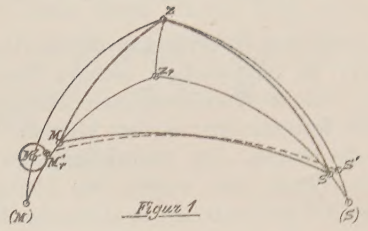
Professor Dr. Foerster.

Professor Dr. Bauschinger.

Abdruck aus »Astronomische Abhandlungen,
als Ergänzungshefte zu den Astronomischen Nachrichten
herausgegeben von Prof. Dr. H. Kreutz«, Nr. 10.

Druck von C. Schaidt in Kiel.

In Fig. 1 möge im Beobachtungszeitpunkt sein $Z$ die Lage des Zenits des Beobachtungsortes, $Z_\rho$ die Lage des Punktes, in welchem der verlängerte Erdradius des Beobachtungsortes die Sphäre trifft, $M'$ der im Zeitpunkt dieser Lage von $Z$ und $Z_\rho$ beobachtete, mit Refraktion, sowie mit täglicher Parallaxe und täglicher Aberration behaftete Ort des Mittelpunktes des Mondes, $S'$ der entsprechend beobachtete Ort des Mittelpunktes der Sonne oder überhaupt des Gestirns, dessen Distanz vom Monde gemessen ist, $(M)$ und $(S)$ die von Refraktion und täglicher Aberration gereinigten, $M$ und $S$ die außer von der Refraktion und der täglichen Aberration auch von der täglichen Parallaxe befreiten Örter, so ist $M'S'$ die unmittelbar beobachtete Distanz, $MS$ die gleichzeitige geozentrisch zu beobachtende Distanz der Mittelpunkte beider Gestirne.



Figur 1

In praxi wird man nicht die Distanz der Mittelpunkte, sondern die der Ränder (oder die bestimmter anderer Stellen der Scheibe) messen, es sei aber vorläufig der Einfachheit wegen die erstere eingeführt. Die Reduktion der Distanzen der Ränder auf die Distanzen der Mittelpunkte wird später behandelt werden.

Es mögen zunächst folgende Bezeichnungen gelten:

$$M'S' = \Delta', \quad ZM' = 90° - h', \quad ZS' = 90° - H', \quad M'ZS' = \pm (a' - A')$$
$$MS = \Delta, \quad ZM = 90° - h, \quad ZS = 90° - H, \quad MZS = \pm (a - A) .$$

Hierbei sind $A$ und $A'$, $a$ und $a'$ die Azimute der Örter $S$ und $S'$, sowie $M$ und $M'$. Es ergibt sich dann aus den sphärischen Dreiecken $M'ZS'$ und $MZS$ folgendes Gleichungspaar:

$$\cos \Delta' = \sin h' \sin H' + \cos h' \cos H' \cos (a' - A')$$
$$\cos \Delta = \sin h \sin H + \cos h \cos H \cos (a - A) .$$

Setzt man zur Abkürzung $\cos (a - A) - \cos (a' - A') = Q'$, so ergibt sich durch die Subtraktion der ersten Gleichung von der zweiten:

$$Q' = \frac{\cos \Delta - \sin h \sin H}{\cos h \cos H} - \frac{\cos \Delta' - \sin h' \sin H'}{\cos h' \cos H'}$$

und daraus leicht durch Zusammenziehung

$$Q' \cos h' \cos H' = \frac{\cos h' \cos H'}{\cos h \cos H} [\cos \Delta - \cos (h - H)] - [\cos \Delta' - \cos (h' - H')] .$$

Setzt man $\frac{\cos h' \cos H'}{\cos h \cos H} = 1 + \eta$, so wird, da $h'$ von $h$ und $H'$ von $H$ nur um Bruchteile des Grades verschieden sein werden, der Bruch nicht stark verschieden von 1 und also $\eta$ eine kleine Größe sein. Zur Abkürzung sei noch $Q' \cos h' \cos H'$ mit $Q$ bezeichnet, dann ist

$$Q = (1 + \eta) [\cos \Delta - \cos (h - H)] - [\cos \Delta' - \cos (h' - H')]$$
$$Q = (\cos \Delta - \cos \Delta') - [\cos (h - H) - \cos (h' - H')] + \eta [\cos \Delta - \cos (h - H)]$$
$$Q = 2 \sin {}^1/_2 (\Delta' + \Delta) \sin {}^1/_2 (\Delta' - \Delta) + 2 \sin {}^1/_2 (h - H + h' - H') \sin {}^1/_2 (h - H - h' + H') + \eta [\cos \Delta - \cos (h - H)] .$$

Es werde nun $\Delta' - \Delta = u$, $h' - h = \Delta h$, $H' - H = \Delta H$ gesetzt, sodaß ${}^1/_2 (\Delta' + \Delta) = \Delta + {}^1/_2 u$, so hat man

$$\sin (\Delta + {}^1/_2 u) \sin {}^1/_2 u = \sin {}^1/_2 (\Delta h - \Delta H) \sin [(h - H) + {}^1/_2 (\Delta h - \Delta H)] - {}^1/_2 \eta [\cos \Delta - \cos (h - H)] + {}^1/_2 Q .$$

Durch Einführung der goniometrischen Entwicklungen für $\sin(\Delta + \frac{1}{2}u)$ und $\sin[(h - H) + \frac{1}{2}(\Delta h - \Delta H)]$ erhält man

$$\frac{1}{2}\sin u \sin\Delta + \cos\Delta \sin^2\frac{1}{2}u = \frac{1}{2}\sin(h-H)\sin(\Delta h - \Delta H) + \cos(h-H)\sin^2\frac{1}{2}(\Delta h - \Delta H) - \frac{1}{2}\eta[\cos\Delta - \cos(h-H)] + \frac{1}{2}Q .$$

Für $\sin u$ kann man die Reihenentwicklung

$$\sin u = u \sin 1'' - \frac{1}{6}u^3 \sin^3 1'' \cdots$$

einsetzen, ebenso für $\sin(\Delta h - \Delta H)$, und man hat dann mit Vernachlässigung der Glieder 4. und höherer Ordnung, die man, wie nachzuweisen ist, begehen darf, hier, da $u$ und $(\Delta h - \Delta H)$ genügend kleine Winkel sind, folgende Grundformel:

$$u\sin\Delta + \frac{1}{2}u^2 \sin 1'' \cos\Delta - \frac{1}{6}u^3\sin^2 1''\sin\Delta \cdots = (\Delta h - \Delta H)\sin(h-H) + \frac{1}{2}(\Delta h - \Delta H)^2 \sin 1'' \cos(h-H) - \frac{1}{6}(\Delta h - \Delta H)^3 \sin^2 1'' \sin(h-H) - \eta \operatorname{cosec} 1''[\cos\Delta - \cos(h-H)] + Q \operatorname{cosec} 1'' .$$

Vor der weiteren Entwicklung dieses Ausdrucks ist es nötig, numerisch zu untersuchen, welche Potenzen von $\Delta h$ und $\Delta H$, resp. welche Kombinationen derselben ohne Genauigkeitsverlust fortgelassen werden können.

$\Delta h$ ist der Betrag der Refraktion, der täglichen Parallaxe und Aberration, um welche die beobachtete Mondhöhe $h'$ sich von der geozentrisch berechneten $h$ unterscheidet. Man kann also als runde Grenzbestimmung $\Delta h < 60'$ setzen und für das entsprechende $\Delta H$, das fast nur von der Refraktion beeinflußt ist, $\Delta H < 3'.4$, und zwar sind alle beträchtlichen Werte von $\Delta h$ negativ und von $\Delta H$ positiv, somit

$$\Delta h - \Delta H < 63'.4 .$$

$u$ ist stets kleiner als $50'$, mithin ergibt sich:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $u \sin 1'' < \frac{1}{70}$ | $\Delta h \sin 1'' < \frac{1}{57}$ | $\Delta H \sin 1'' < \frac{1}{1000}$ | $(\Delta h - \Delta H)\sin 1'' < \frac{1}{54}$ |
| $\frac{1}{2}u^2 \sin 1'' < 21''.4$ | $\frac{1}{2}\Delta h^2 \sin 1'' < 31''.6$ | $\frac{1}{2}\Delta H^2 \sin 1'' < 0''.10$ | $\frac{1}{2}(\Delta h - \Delta H)^2 \sin 1'' < 35''.2$ |
| $\frac{1}{6}u^3 \sin^2 1'' < 0''.10$ | $\frac{1}{6}\Delta h^3 \sin^2 1'' < 0''.18$ | $\frac{1}{6}\Delta H^3 \sin^2 1'' < 0''.00003$ | $\frac{1}{6}(\Delta h - \Delta H)^3 \sin^2 1'' < 0''.22$ . |

Aus dieser Zusammenstellung geht folgendes hervor. Die Glieder von der 4. Ordnung der kleinen Größen $u$, $\Delta h$, $\Delta H$, $(\Delta h - \Delta H)$ und die Glieder von noch höherer Ordnung können bei der vorliegenden Berechnung vernachlässigt werden, da schon die Glieder von der 3. Ordnung nur wenige Zehntel der Bogensekunde erreichen.

Aber die Glieder 2. Ordnung dürfen, wenn man bei diesen Berechnungen in der Distanz auch nur die Bogensekunde (in der geographischen Länge also ein bis zwei Zeitsekunden) verbürgen will, nicht wegbleiben. Ihre Vernachlässigung könnte Fehler der Längen- und überhaupt der Epochenbestimmungen von ganzen Zeitminuten hervorrufen.

Bei den strengsten Berechnungen aber, welche das Hundertstel der Bogensekunde verbürgen wollen, müssen auch die Glieder 3. Ordnung mitgenommen werden.

Auf alle Fälle aber wird es durch die verschwindende Kleinheit der Glieder von der 4. Ordnung ab ermöglicht, die Reduktionsgröße $u$, welche hier zunächst die Unbekannte in einer Gleichung 3. Grades ist, durch eine sehr konvergente Näherung zu bestimmen, und zwar derartig, daß man zunächst unter Weglassung der Größen von der 2. und 3. Ordnung in ganz roher Näherung einen primären Wert $u_1$ berechnet.

Der zweite, für die gewöhnlichen Beobachtungen schon hinreichende Näherungswert $u_2$ ergibt sich dann durch Eintragung jenes primären Wertes $u_1$ in die Glieder 2. Ordnung, unter Weglassung der Glieder 3. Ordnung.

Endlich ergibt sich der genaueste Wert $u_3$, der überhaupt hier erfordert werden kann, durch Eintragung des vorerwähnten Näherungswertes $u_2$ in die Glieder 2. Ordnung und durch Hinzunahme der Glieder 3. Ordnung, die mit dem obigen primären Näherungswert $u_1$ berechnet werden.

Bevor dies ausgeführt wird, wird zunächst noch die Größe $\eta$ auch in eine Reihe zu entwickeln sein.

### Entwicklung von $\eta$.

Es war gesetzt worden

$$\frac{\cos(h+\Delta h)\cos(H+\Delta H)}{\cos h \cos H} - 1 = \eta .$$

Dieser Ausdruck läßt sich leicht in folgenden transformieren:

$$\eta \cos h \cos H = (-\frac{1}{2}\Delta h^2 \sin^2 1'' - \frac{1}{2}\Delta H^2 \sin^2 1'')\cos h \cos H - (\Delta H \sin 1'' - \frac{1}{2}\Delta h^2 \Delta H \sin^3 1'' - \frac{1}{6}\Delta H^3 \sin^3 1'')\cos h \sin H - (\Delta h \sin 1'' - \frac{1}{6}\Delta h^3 \sin^3 1'' - \frac{1}{2}\Delta h \Delta H^2 \sin^3 1'')\sin h \cos H + \Delta h \Delta H \sin^2 1'' \sin h \sin H .$$

Die hierbei begangenen Vernachlässigungen werden nach der oben geführten Genauigkeitsdiskussion berechtigt erscheinen.

Nimmt man zunächst aus dieser Gleichung nur die Glieder 1. Ordnung mit und bezeichnet den sich hieraus ergebenden Wert mit $\eta_1$, so erhält man

$$\eta_1 = -(\Delta h \operatorname{tg} h + \Delta H \operatorname{tg} H)\sin 1'' .$$

Der 2. Näherungswert von $\eta$, wir nennen ihn $\eta_2$, ergibt sich durch die Mitnahme der Glieder $\Delta h^2$ und $\Delta h \cdot \Delta H$ ($\Delta H^2$ ist gegen $\Delta h^2$ sehr klein und braucht erst in der 3. Näherung mitgenommen zu werden). Es wird also

$$\eta_2 - \eta_1 = -\frac{1}{2}\Delta h^2 \sin^2 1'' + \Delta h \Delta H \operatorname{tg} h \operatorname{tg} H \sin^2 1'' .$$

In der 3. Näherung ist nur $\Delta H^2$ und $\Delta h^3$ zu berücksichtigen, denn $\Delta h^2 \Delta H \sin^3 1''$ ist $< 0.0000003$, ebenso ist

$^1/_6 \Delta H^3 \sin^3 1''$ und $^1/_2 \Delta h \Delta H^2 \sin^3 1''$ zu vernachlässigen. Hiernach ist

$$\eta_3 - \eta_2 = - {}^1/_2 \Delta H^2 \sin^2 1'' + {}^1/_6 \Delta h^3 \sin^3 1'' \operatorname{tg} h \ .$$

Fassen wir schließlich diese Näherungen zusammen, so erhalten wir für $\eta \operatorname{cosec} 1''$, welcher Ausdruck in der obigen Entwicklung der Distanzformel enthalten ist:

$$\begin{aligned} \eta \operatorname{cosec} 1'' = & - (\Delta h \operatorname{tg} h + \Delta H \operatorname{tg} H) \\ & - ({}^1/_2 \Delta h^2 - \Delta h \Delta H \operatorname{tg} h \operatorname{tg} H) \sin 1'' \\ & - ({}^1/_2 \Delta H^2 - {}^1/_6 \Delta h^3 \operatorname{tg} h \sin 1'') \sin 1'' \ . \end{aligned}$$

## Weitere Entwicklung der Formel für $u$.

Wenn man $\eta \operatorname{cosec} 1''$ in die Formel für $u$ auf Seite 2 einsetzt, so lautet diese Formel folgendermaßen:

$$\begin{aligned} u \sin \Delta + {}^1/_2 u^2 \cos \Delta \sin 1'' - {}^1/_6 u^3 \sin \Delta \sin^2 1'' = & (\Delta h - \Delta H) \sin (h - H) + {}^1/_2 (\Delta h - \Delta H)^2 \cos (h - H) \sin 1'' \\ & - {}^1/_6 (\Delta h - \Delta H)^3 \sin (h - H) \sin^2 1'' + (\Delta h \operatorname{tg} h + \Delta H \operatorname{tg} H) [\cos \Delta - \cos (h - H)] \\ & + ({}^1/_2 \Delta h^2 \sin 1'' - \Delta h \Delta H \operatorname{tg} h \operatorname{tg} H \sin 1'') [\cos \Delta - \cos (h - H)] \\ & + ({}^1/_2 \Delta H^2 \sin 1'' - {}^1/_6 \Delta h^3 \sin^2 1'' \operatorname{tg} h) [\cos \Delta - \cos (h - H)] + Q \operatorname{cosec} 1'' \end{aligned}$$

oder nach den verschiedenen Ordnungen der Größen $u$, $\Delta h$, $\Delta H$ abgestuft:

$$\left.\begin{matrix} u \sin \Delta \\ + {}^1/_2 u^2 \cos \Delta \sin 1'' \\ - {}^1/_6 u^3 \sin \Delta \sin^2 1'' \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} (\Delta h - \Delta H) \sin (h - H) + (\Delta h \operatorname{tg} h + \Delta H \operatorname{tg} H) [\cos \Delta - \cos (h - H)] \\ + {}^1/_2 (\Delta h - \Delta H)^2 \cos (h - H) \sin 1'' + ({}^1/_2 \Delta h^2 - \Delta h \Delta H \operatorname{tg} h \operatorname{tg} H) [\cos \Delta - \cos (h - H)] \sin 1'' \\ - {}^1/_6 (\Delta h - \Delta H)^3 \sin (h - H) \sin^2 1'' - ({}^1/_6 \Delta h^3 \operatorname{tg} h \sin 1'' - {}^1/_2 \Delta H^2) [\cos \Delta - \cos (h - H)] \sin 1'' + Q \operatorname{cosec} 1''. \end{matrix}\right.$$

Hier darf man den Ausdruck $Q \operatorname{cosec} 1''$ einstweilen, wie später näher zu erweisen, zu den Gliedern 2. Ordnung rechnen.

Läßt man zunächst die Glieder 2. und 3. Ordnung auf beiden Seiten weg, stellt man also nur die Glieder in der ersten Zeile rechts und links in Rechnung, und bezeichnet man den hiernach berechneten Näherungswert von $u$ mit $u_1$, so hat man:

$$u_1 \sin \Delta = \Delta h [\sin (h - H) - \operatorname{tg} h \cos (h - H) + \operatorname{tg} h \cos \Delta] - \Delta H [\sin (h - H) + \operatorname{tg} H \cos (h - H) - \operatorname{tg} H \cos \Delta] \ .$$

Hieraus wird

$$u_1 \sin \Delta = \frac{\Delta h}{\cos h} (\sin h \cos \Delta - \sin H) + \frac{\Delta H}{\cos H} (\sin H \cos \Delta - \sin h) \ .$$

Bezeichnet man nun die Winkel, welche am Mond und an dem andern Gestirn die Distanzrichtung mit der Richtung zum Scheitelpunkt macht, also nach Fig. 1 $ZMS$ mit $W_m$ und $ZSM$ mit $W_s$, so hat man für sie die Gleichungen:

$$\cos W_m = \frac{\sin H - \sin h \cos \Delta}{\cos h \sin \Delta} \quad \text{und} \quad \cos W_s = \frac{\sin h - \sin H \cos \Delta}{\cos H \sin \Delta} \ .$$

Die in obiger Gleichung für $u_1$ rechts stehenden Ausdrücke finden sich nach Division mit $\sin \Delta$ in den Gleichungen $\cos W_m$ und $\cos W_s$ mit umgekehrtem Zeichen wieder, und wir haben somit

$$u_1 = - (\Delta h \cos W_m + \Delta H \cos W_s)$$

als die erste, übrigens schon 1759 von Lacaille aufgestellte Näherungsformel. Durch Mitnahme der Glieder 2. Ordnung, also der beiden ersten Zeilen rechts und links, ergibt sich sodann folgende Entwicklung, wenn wir für das Glied in der 1. Zeile rechts in der obigen vollständigen Gleichung jetzt kurz $u_1 \sin \Delta$ einsetzen und wenn wir in der Entwicklung der 2. Zeile rechts $\Delta H^2$, als nach dem obigen zu den Gliedern 3. Ordnung gehörig, weglassen:

$$\begin{aligned} u_2 \sin \Delta + {}^1/_2 u_2{}^2 \sin 1'' \cos \Delta = & \ u_1 \sin \Delta + {}^1/_2 \Delta h^2 \sin 1'' \cos \Delta \\ & - \Delta h \Delta H \sin 1'' [\cos (h - H) - \operatorname{tg} h \operatorname{tg} H \cos (h - H) + \operatorname{tg} h \operatorname{tg} H \cos \Delta] + Q \operatorname{cosec} 1'' \ . \end{aligned}$$

Für die Parenthese rechts ergibt sich aber leicht im Dreieck $ZMS$ der Ausdruck:

$$\cos h \cos H + \sin h \sin H \cos (a - A) \ .$$

Man hat also für den Übergang von dem ersten Näherungswert $u_1$ zum zweiten Näherungswert $u_2$, wenn man in dem quadratischen Gliede $^1/_2 u_2{}^2 \cos \Delta \sin 1''$ in einer hier ausreichenden Genauigkeit $u_1$ statt $u_2$ einsetzt:

$$u_2 - u_1 = - \frac{{u_1}^2}{2} \sin 1'' \operatorname{cotg} \Delta + \frac{\Delta h^2}{2} \sin 1'' \operatorname{cotg} \Delta - \Delta h \Delta H \sin 1'' \left( \frac{\cos h \cos H + \sin h \sin H \cos (a - A)}{\sin \Delta} \right) + \frac{Q}{\sin \Delta \sin 1''} \ .$$

Trägt man für $u_1$ auf der rechten Seite jetzt seinen obigen Wert ein, so wird das erste Glied rechts:

$$- {}^1/_2 (\Delta h \cos W_m + \Delta H \cos W_s)^2 \sin 1'' \operatorname{cotg} \Delta$$

und hiermit, gleichzeitig vervollständigt durch den in $Q$ enthaltenen Ausdruck der Seitenparallaxe, welcher als ein kleines Glied betrachtet werden kann, da $Q \operatorname{cosec} 1'' < 12''$ bleibt, aber mit Weglassung des zur 3. Ordnung gehörenden Gliedes $-\frac{1}{2}\Delta H^2 \sin 1'' \cos^2 W_s \operatorname{cotg} \Delta$:

$$u_2 = u_1 + \tfrac{1}{2}\Delta h^2 \sin 1'' \sin^2 W_m \operatorname{cotg} \Delta - \frac{\Delta h\, \Delta H \sin 1''}{\sin \Delta}\left[\sin h \sin H \cos(a - A) + \cos h \cos H + \cos W_m \cos W_s \cos \Delta\right] + \frac{Q}{\sin \Delta \sin 1''} .$$

In der dritten und letzten Näherungsstufe $u_3$ werden nun auch die Glieder mit $\Delta h^3$ und $\Delta H^2$ (siehe die 2. und 3. Reihe rechts in der Gleichung auf Seite 3) berücksichtigt, während die Glieder mit $\Delta h^2 \cdot \Delta H$, $\Delta h \cdot \Delta H^2$ und $\Delta H^3$ auch hierbei vernachlässigt werden dürfen. Zugleich wird statt des Ausdrucks $-\frac{1}{2} u_1^2 \sin 1'' \operatorname{cotg} \Delta$ in $u_2 - u_1$ jetzt rechts eingetragen $-\frac{1}{2} u_2^2 \sin 1'' \operatorname{cotg} \Delta$, während in dem Gliede $\frac{1}{6} u^3 \sin^2 1''$ der erste Näherungswert $u_1$ eingesetzt wird.

Hiermit hat man:

$$u_3 = u_2 - \tfrac{1}{2} \sin 1'' \operatorname{cotg} \Delta (u_2^2 - u_1^2) + \tfrac{1}{6} u_1^3 \sin^2 1'' - \tfrac{1}{2}\Delta H^2 \sin 1'' \cos^2 W_s \operatorname{cotg} \Delta + \tfrac{1}{6}\Delta h^3 \sin^2 1'' \left(\frac{\sin H - \sin h \cos \Delta}{\cos h \sin \Delta}\right) + \tfrac{1}{2}\Delta H^2 \sin 1'' \operatorname{cotg} \Delta .$$

Nun ist $-\frac{1}{2}(u_2^2 - u_1^2) = -u_1 (u_2 - u_1) \cdots$

$$= +\tfrac{1}{2}\Delta h^3 \sin^2 1'' \cos W_m \sin^2 W_m \operatorname{cotg} \Delta + \Delta h \cos W_m Q \operatorname{cosec} 1''$$

$$\tfrac{1}{6} u_1^3 \sin^2 1'' = -\tfrac{1}{6}\Delta h^3 \sin^2 1'' \cos^3 W_m \cdots$$

und der Faktor $\dfrac{\sin H - \sin h \cos \Delta}{\cos h \sin \Delta}$ reduziert sich auf $\cos W_m$, sodaß man zusammenfassend findet:

$$u_3 = u_2 + \tfrac{1}{2}\Delta h^3 \sin^2 1'' (\cos W_m \sin^2 W_m \operatorname{cotg}^2 \Delta - \tfrac{1}{3} \cos^3 W_m + \tfrac{1}{3} \cos W_m) + \tfrac{1}{2}\Delta H^2 \sin 1'' \operatorname{cotg} \Delta (1 - \cos^2 W_s) + \Delta h\, Q \operatorname{cotg} \Delta \cos W_m$$

oder

$$u_3 = u_2 + \tfrac{1}{6}\Delta h^3 \sin^2 1'' \cos W_m \sin^2 W_m (1 + 3 \operatorname{cotg}^2 \Delta) + \tfrac{1}{2}\Delta H^2 \sin 1'' \sin^2 W_s \operatorname{cotg} \Delta + \Delta h\, Q \cos W_m \operatorname{cotg} \Delta \cdots$$

wo das letzte Glied fast stets vernachlässigt werden kann, wenn $\operatorname{cotg} \Delta$ nicht sehr erheblich ist.

Es war gesetzt worden

$$Q' = \cos(a - A) - \cos(a' - A')$$

$$Q = Q' \cos h' \cos H'$$

und

$$\frac{\cos h' \cos H'}{\cos h \cos H} = 1 + \eta$$

mithin $\cos h' \cos H' = \cos h \cos H (1 + \eta)$ .

Daraus ergibt sich für $Q$ folgender Wert:

$$Q = [\cos(a - A) - \cos(a' - A')] \cos h \cos H (1 + \eta) .$$

Setzt man nun

$$a' - a = \Delta a$$

$$A' - A = \Delta A$$

und entwickelt, so wird

$$Q = 2 \sin \tfrac{1}{2}(\Delta a - \Delta A) \sin(\tfrac{1}{2}\Delta a - \tfrac{1}{2}\Delta A + a - A) \cos h \cos H (1 + \eta) .$$

Da die Differenz $\Delta a - \Delta A$ sehr klein ist, so kann man unter dem zweiten Sinus den Betrag $\frac{1}{2}(\Delta a - \Delta A)$ fortlassen, den ersten Sinus aber mit dem Bogen vertauschen, also schreiben, mit Eintragung des schon oben entwickelten Wertes von $\eta$

$$Q \operatorname{cosec} 1'' = (\Delta a - \Delta A) \sin(a - A) \cos h \cos H (1 - \Delta h \operatorname{tg} h \sin 1'' - \Delta H \operatorname{tg} H \sin 1'' \cdots) \cdots .$$

Für $\Delta a$ und $\Delta A$ hat man aus der Parallaxentheorie folgende Näherungsausdrücke einzusetzen:

$$\Delta a = \varrho \frac{\Pi_m}{\cos h} \sin(\delta_z - \delta_\varrho) \sin(a + \Delta a)$$

$$\Delta A = \varrho \frac{\Pi_s}{\cos H} \sin(\delta_z - \delta_\varrho) \sin(A + \Delta A)$$

in denen $\varrho$ den Erdradius nach dem Beobachtungsort, $\Pi_m$ resp. $\Pi_s$ die Äquatoreal-Horizontal-Parallaxen des Mondes und des anderen Gestirns, $\delta_z$ die Deklination des Zenits (geographische Breite), sowie $\delta_\varrho$ die Deklination des Punktes bedeutet, in dem der verlängerte Radiusvektor die Himmelskugel trifft.

Setzt man für $\sin(a + \Delta a)$ und $\sin(A + \Delta A)$ die Näherungswerte $\sin a$ und $\sin A$ ein, welche für diese nur wenige Sekunden betragende Korrektion völlig ausreichend sind, so hat man

$$\frac{Q}{\sin 1'' \sin \Delta} = \varrho \frac{\sin(\delta_z - \delta_\varrho)}{\sin \Delta} \sin(a - A) [(1 - \Delta h \operatorname{tg} h \sin 1'' - \Delta H \operatorname{tg} H \sin 1'') \times (\Pi_m \sin a \cos H - \Pi_s \sin A \cos h)] .$$

Auch diesen Ausdruck wird man zweckmäßig auf die 2. und 3. Näherung verteilen und zwar auf erstere die von $\Delta h$ abhängigen Glieder, die einen größeren Zahlenwert haben, also etwa zu Näherung 2 hinzufügen

$$\varrho \frac{\sin(\delta_z - \delta_\varrho)}{\sin \Delta} \sin(a - A)\, \Pi_m \sin a \cos H (1 - \Delta h \operatorname{tg} h \sin 1'') \cdots$$

und zu Näherung 3 die übrigen, sehr kleinen Glieder

$$- \varrho \frac{\sin(\delta_z - \delta_\varrho)}{\sin \Delta} \sin(a - A)\, (\Pi_s \sin A \cos h + \Pi_m \Delta H \sin 1'' \sin a \sin H) \cdots .$$

Es ist schließlich, um die größte Strenge zu erzielen, noch nötig, an Näherung 2 eine von der Seitenparallaxe abhängige Korrektion anzubringen. Es war in dieser Näherung in dem Gliede $-\frac{1}{2} u^2 \sin 1'' \operatorname{cotg} \Delta$ auf der rechten Seite für $u$ der aus der 1. Näherung folgende Wert

$$-(\Delta h \cos W_m + \Delta H \cos W_s)$$

eingesetzt worden. Mit noch größerer Genauigkeit wird man dafür setzen

$$\left(-\Delta h \cos W_m - \Delta H \cos W_s \cdots + \frac{Q \sin \Delta}{\sin \Delta}\right) .$$

Beim Quadrieren dieser Klammer wird das nicht zu vernachlässigende Glied $-2 \Delta h \cos W_m Q$ auftreten, welches in der 2. Näherung dadurch berücksichtigt werden kann, daß man den Faktor $(1 + \Delta h \cos W_m \sin 1'' \operatorname{cotg} \Delta)$ hinzufügt zu dem letzten Gliede, welches ja auch mit dem Faktor $Q$ multipliziert war. Man kann noch auf folgende Weise zwei Klammern vereinigen und dadurch den Ausdruck etwas einfacher gestalten:

$$(1 - \Delta h \sin 1'' \operatorname{tg} h)(1 + \Delta h \sin 1'' \cos W_m \operatorname{cotg} \Delta) = 1 - \Delta h \sin 1'' (\operatorname{tg} h - \cos W_m \operatorname{cotg} \Delta) \cdots$$

abgesehen von dem in $\Delta h$ quadratischen Gliede. Nun ist

$$\operatorname{tg} h - \cos W_m \operatorname{cotg} \Delta = \frac{\cos H \cos W_s}{\cos h \sin \Delta} .$$

Folglich ergibt sich für das Produkt der Klammern

$$1 - \frac{\Delta h \sin 1'' \cos H \cos W_s}{\cos h \sin \Delta} .$$

Für $\frac{\cos H}{\cos h}$ kann man nach dem Sinussatze noch schreiben $\frac{\sin W_m}{\sin W_s}$, also

$$\frac{\cos H \cos W_s}{\cos h \sin \Delta} = \frac{\sin W_m}{\sin W_s} \frac{\cos W_s}{\sin \Delta}, \text{ und da } \frac{\sin W_s}{\cos h} = \frac{\sin(a - A)}{\sin \Delta}$$

so wird

$$\frac{\cos H \cos W_s}{\cos h \sin \Delta} = \frac{\cos W_s}{\sin(a - A)} \frac{\sin W_m}{\cos h}$$

ferner das Produkt gleich

$$\frac{1}{\sin(a - A)} \left(\sin(a - A) - \frac{\Delta h \sin 1'' \cos W_s \sin W_m}{\cos h}\right)$$

und der Ausdruck der Seitenparallaxe in der 2. Näherung gleich

$$+ \varrho \sin(\delta_z - \delta_\varrho)\, \Pi_m \frac{\sin a}{\sin \Delta} \cos H \left(\sin(a - A) - \frac{\Delta h \sin 1'' \cos W_s \sin W_m}{\cos h}\right) \cdots$$

$$u_2 - u_1 = \frac{\Delta h^2}{2} \sin 1'' \sin^2 W_m \operatorname{cotg} \Delta - \frac{\Delta h \, \Delta H \sin 1''}{\sin \Delta} [\sin h \sin H \cos(a - A) + \cos h \cos H + \cos W_m \cos W_s \cos \Delta]$$

$$+ \varrho \sin(\delta_z - \delta_\varrho)\, \Pi_m \frac{\sin a}{\sin \Delta} \cos H \left(\sin(a - A) - \frac{\Delta h \sin 1'' \cos W_s \sin W_m}{\cos h}\right) .$$

## Zusammenfassung der Distanzformel.

Es wird jetzt nötig sein, die Distanzformel zusammenzufassen und in eine sowohl übersichtliche, wie für die Rechnung bequeme Form zu bringen.

Da $u_1 + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) = u_3 =$ dem in dieser Formel genauesten Wert des Unterschiedes der beobachteten und der berechneten Distanz der Mittelpunkte des Mondes und des anderen Gestirns ist, den wir jetzt mit $u$ ohne Index bezeichnen wollen, so ergibt sich

$$u = \left\{ - \Delta h \cos W_m - \Delta H \cos W_s \right\}$$
$$+ \left\{ \frac{\Delta h^2}{2} \sin 1'' \sin^2 W_m \operatorname{cotg} \Delta - \frac{\Delta h \, \Delta H \sin 1''}{\sin \Delta} \left[ \sin h \sin H \cos (a - A) + \cos h \cos H + \cos W_m \cos W_s \cos \Delta \right] \right.$$
$$\left. + \varrho \sin (\delta_z - \delta_\varrho) \, \Pi_m \frac{\sin a}{\sin \Delta} \cos H \left( \sin (a - A) - \frac{\Delta h \sin 1'' \cos W_s \sin W_m}{\cos h} \right) \right\}$$
$$+ \left\{ \frac{1}{6} \Delta h^3 \sin^2 1'' \cos W_m \sin^2 W_m \, (1 + 3 \operatorname{cotg}^2 \Delta) + \frac{1}{2} \Delta H^2 \sin 1'' \sin^2 W_s \operatorname{cotg} \Delta \right.$$
$$\left. - \varrho \frac{\sin (\delta_z - \delta_\varrho)}{\sin \Delta} \sin (a - A) \, (\Pi_s \sin A \cos h + \Pi_m \, \Delta H \sin 1'' \sin a \sin H) \cdots \right\} .$$

Hierbei sind die drei Näherungen deutlich durch $\left\{ \; \right\}$ voneinander abgetrennt.

Die Übersicht über die numerische Größe der einzelnen Glieder wird dadurch sehr erleichtert, daß man für Glieder, die nur innerhalb geringer Grenzen liegen können, gewisse Zahlenmittelwerte einführt und diese mit den konstanten Zahlenfaktoren vereinigt.

Da z. B. $\Delta h$ selten mehr als 50′ betragen wird, so wird man für $^1/_2 \Delta h^2 \sin 1''$ schreiben, wenn $\Delta h'$ den in Bogenminuten ausgedrückten Betrag von $\Delta h$ bezeichnet,

$$\underset{[1.33879]}{21''.817} \left( \frac{\Delta h'}{50} \right)^2 .$$

Verfährt man ebenso bei den anderen Gliedern, so läßt sich die Distanzformel so schreiben:

$$u = \left\{ - \Delta h \cos W_m - \Delta H \cos W_s \right\}$$
$$+ \left\{ \underset{[1.33879]}{21''.817} \left( \frac{\Delta h'}{50} \right)^2 \sin^2 W_m \operatorname{cotg} \Delta - \underset{[0.24188]}{1''.745} \left( \frac{\Delta h' \, \Delta H'}{100} \right) \frac{F}{\sin \Delta} \right.$$
$$\left. + \varrho \sin (\delta_z - \delta_\varrho) \, \Pi_m \frac{\sin a}{\sin \Delta} \cos H \left[ \sin (a - A) - \underset{[8.1627]}{0.0154} \left( \frac{\Delta h'}{50} \right) \frac{\cos W_s \sin W_m}{\cos h} \right] \right\}$$
$$+ \left\{ \underset{[9.0244]}{0''.106} \left( \frac{\Delta h'}{50} \right)^3 \cos W_m \sin^2 W_m \, (1 + 3 \operatorname{cotg}^2 \Delta) + \underset{[9.3388]}{0''.218} \left( \frac{\Delta H'}{5} \right)^2 \sin^2 W_s \operatorname{cotg} \Delta \right.$$
$$\left. - \varrho \frac{\sin (\delta_z - \delta_\varrho)}{\sin \Delta} \sin (a - A) \left[ \Pi_s \sin A \cos h + \underset{[7.1627]}{0.0015} \left( \frac{\Delta H'}{5} \right) \Pi_m \sin a \sin H \right] \right\} .$$

Die unter den Zahlen stehenden, in eckigen Klammern eingeschlossenen Logarithmen werden die Rechnung erleichtern, wie jene der Übersichtlichkeit förderlich sind. Der zur Abkürzung eingeführte Faktor $F$ ist folgendermaßen definiert:

$$F = \sin h \sin H \cos (a - A) + \cos h \cos H + \cos W_m \cos W_s \cos \Delta .$$

In dieser Formel braucht man mit Ausnahme des ersten Gliedes nur vierstellige Logarithmen anzuwenden, ja für die letzten Glieder genügen dreistellige. Hierdurch wird die Berechnung von $u$ selbst für den höchsten Genauigkeitsgrad sehr kurz und mühelos.

Zur weiteren Erleichterung sind noch einige Faktoren, wie $0''.106 \, (1 + 3 \operatorname{cotg}^2 \Delta)$ u. a. tabuliert.

## Entwicklung der Unterschiede der wahren und scheinbaren Höhen.

Die Entwicklung der Distanzformel ist hiermit abgeschlossen. Es ist nunmehr unsere Aufgabe, auch Formeln zu finden, die in möglichst einfacher Weise die Unterschiede der scheinbaren von den wahren Höhen, also $\Delta h$ und $\Delta H$ geben. Um aus den berechneten wahren Höhen die scheinbaren zu erhalten, wie sie sich bei direkter Beobachtung ergeben hätten, muß man an die wahren Höhen Korrektionen für Parallaxe und Refraktion anbringen. Da für den Mond, als den uns nächsten Himmelskörper diese Korrektionen am größten sind und mit völliger Strenge berechnet werden müssen, so soll im folgenden nur die Entwicklung von $\Delta h$ ausführlich gegeben werden. Für $\Delta H$ gelten dieselben Formeln, aber wesentlich vereinfacht. Ebenfalls ist bei dem Kapitel Parallaxenkorrektion die Seitenparallaxe des Mondes und des anderen Gestirns, $\Delta a$ und $\Delta A$, abzuleiten.

Es ist also hier die Umkehrung der in der Praxis viel häufiger vorkommenden Aufgabe zu lösen, aus den scheinbaren Höhen durch Anbringung von Refraktion und Parallaxe die wahren zu rechnen.

### a. Entwicklung dieser Formeln für den Mond.

#### α. Parallaxe.

Bezeichnet man mit $h_\varrho$ die geozentrische Höhe des Mondmittelpunktes, mit $h_\varrho'$ die mit der Parallaxe behaftete, vom Beobachtungsort aus meßbare, scheinbare Höhe, mit $\Pi_m$

die Äquatoreal-Horizontalparallaxe des Mondes und setzt

$$h_\rho' - h_\rho = \Delta h_\rho$$

so hat man folgenden strengen Ausdruck der Höhenparallaxe:

$$-\sin \Delta h_\rho = \varrho \sin \Pi_m \cos h_\rho'$$

wo $\varrho$ wie gewöhnlich der Radiusvektor nach dem Beobachtungsort ist. Setzt man für $h_\rho'$ ein $h_\rho + \Delta h_\rho$, so erhält man folgende Gleichung

$$-\sin \Delta h_\rho = \varrho \sin \Pi_m \cos (h_\rho + \Delta h_\rho)$$

$$-\operatorname{tg} \Delta h_\rho = \frac{\varrho \sin \Pi_m \cos h_\rho}{1 - \sin h_\rho \sin \Pi_m} .$$

Dieser Ausdruck läßt sich auf bekannte Art in folgende Reihe entwickeln:

$$-\Delta h_\rho = \varrho \Pi_m \cos h_\rho \sin 1'' + \tfrac{1}{2} (\varrho \Pi_m \sin 1'')^2 \sin 2 h_\rho - \tfrac{1}{3} (\varrho \Pi_m \sin 1'')^3 \cos 3 h_\rho - \tfrac{1}{6} \varrho \Pi_m^3 \sin^3 1'' \cos h_\rho .$$

Wenn man hier wieder Mittelwerte einführt und die konstanten Faktoren ausrechnet, so erhält man

$$-\Delta h_\rho'' = \varrho \Pi_m \cos h_\rho + \underset{[1.4531]}{28''.3887} \left(\frac{\varrho \Pi_m}{3422}\right)^2 \sin 2 h_\rho - \underset{[9.4969]}{0''.314} \left(\frac{\varrho \Pi_m}{3422}\right)^3 \cos 3 h_\rho - \underset{[9.1958]}{0''.157}\, \varrho \left(\frac{\Pi_m}{3422}\right)^3 \cos h_\rho .$$

Diese Formel gibt die Parallaxe des Mondes bis auf 0".01 genau, indem nur Glieder von einer höheren als der 3. Ordnung der Parallaxe vernachlässigt wurden. Auch hier erleichtern Tafeln die Ausrechnung.

Für $h_\rho$ ist bei ellipsoidischer Gestalt der Erde zu setzen in 1. Näherung

$$h_\rho = h + (\delta_z - \delta_\rho) \cos a$$

wo $h$ die wahre, aus den Koordinaten des Gestirns und des Zenits berechnete Höhe bedeutet. Bezeichnet man endlich die mit der Parallaxe behaftete Höhe, also nach obiger Fig. 1 $90° - Z(M)$ mit $h_1$ und $h_1 - h$ kurz mit $\Delta h_\Pi$, so findet man leicht in Verbindung mit der vollständigeren Entwicklung des obigen genäherten Ausdruckes von $h_\rho - h$

$$\Delta h_\Pi = \Delta h_\rho + \tfrac{1}{2} \varrho \Pi_m \sin^2 (\delta_z - \delta_\rho) \sin^2 a \cos h \cdots$$

wo das zweite Glied rechts 0".02 nicht übersteigt.

Für die Seitenparallaxe haben wir folgenden Ausdruck:

$$\sin \Delta a = -\frac{\sin \Delta h_\rho \sin a' \sin (\delta_z - \delta_\rho)}{\cos h_\rho' \cos h}$$

und hierfür genügend genau

$$\Delta a = -\frac{\Delta h_\rho \sin a' \sin (\delta_z - \delta_\rho)}{\cos h_\rho' \cos h} .$$

Setzt man für $-\Delta h_\rho$ seinen Wert, so wird

$$\Delta a = +\varrho \Pi_m \sin (\delta_z - \delta_\rho) \frac{\sin a'}{\cos h} .$$

Da $\Delta a$ in der Distanzformel mit kleinen Faktoren multipliziert ist, so kann man für $\sin a' = \sin (a + \Delta a)$ mit genügender Genauigkeit setzen $\sin a$, also

$$\Delta a = \varrho \Pi_m \sin (\delta_z - \delta_\rho) \frac{\sin a}{\cos h}$$

und ebenso

$$\Delta A = \varrho \Pi_s \sin (\delta_z - \delta_\rho) \frac{\sin A}{\cos H} .$$

Man könnte die Höhenparallaxe des Mondes statt durch obige Reihenentwicklung auch noch durch Auflösung der strengen transzendenten Gleichung mittels logarithmischer Differenzen finden.

Für unseren Zweck wird es am ratsamsten sein, mit Hilfe der ersten beiden Glieder unserer Reihenentwicklung, die sehr bequem mit Hilfe der Tafel I zu berechnen sind, den Näherungswert $x_0 = -(\Delta h_\rho)_0$ zu bestimmen, also

$$x_0 = \varrho \Pi_m \cos h_\rho + \underset{[1.4531]}{28''.3887} \left(\frac{\varrho \Pi_m}{3422}\right)^2 \sin 2 h_\rho \cdots$$

und dann

$$\sin x_1 = \varrho \sin \Pi_m \cos (h_\rho - x_0)$$

$$x_1 = -\Delta h_\rho$$

Dieser Wert wird meist schon völlig strenge sein. Noch genauer, ohne größere Rechnungsarbeit, kann man $x_0$ so schreiben:

$$x_0 = \varrho \sin \Pi_m \cos h_\rho + \tfrac{1}{2} (\varrho \sin \Pi_m)^2 \sin 2 h_\rho$$

und daraus $-\Delta h_\rho$ wie oben.

Schließlich seien an dieser Stelle kurz die Formeln für die von der sphäroidischen Gestalt der Erde abhängigen Größen $(\delta_z - \delta_\rho)$ und $\varrho$ nach Bessel angegeben:

$$\delta_z - \delta_\rho = 690''.65 \sin 2 \delta_z - 1''.16 \sin 4 \delta_z + \cdots$$

$$\log \varrho = 9.9992747 + 0.0007271 \cos 2 \delta_z - 0.0000018 \cos 4 \delta_z \cdots$$

Tafeln für diese Ausdrücke findet man in den meisten Tafelsammlungen, z. B. in denen von Albrecht.

### β. Refraktion.

Nehmen wir an, es wäre die Höhe eines unserer Gestirne, zum Beispiel des Mondes, von der Erdoberfläche aus direkt beobachtet, also uns die scheinbare gemessene Höhe bekannt, die wir auf die wahre Höhe reduzieren sollten, wie sie vom Erdmittelpunkte aus erscheinen würde. Dann müßten wir zunächst die Ortsveränderung, die durch die Konstitution der Erdatmosphäre bedingt ist, berechnen, diese an die scheinbare beobachtete Höhe anbringen und hätten dann den Ort des Gestirns, wie wir ihn vom Beobachtungsorte aus ohne das Vorhandensein der Atmosphäre sehen würden, also bezogen auf das Koordinaten-

system, dessen Anfangspunkt durch den Beobachtungsort bestimmt ist. Um von diesem Koordinatensystem auf das überzugehen, dessen Anfangspunkt der Erdmittelpunkt ist, müßten wir die Parallaxe an den von der Strahlenbrechung befreiten Betrag der Höhe anbringen und hätten dann die wahre Höhe. Offenbar wäre der Weg falsch, zuerst die Parallaxe und dann die Refraktion anzubringen, weil ja die Refraktion gerade vom direkt am Beobachtungsort unter bekannten atmosphärischen Verhältnissen gemessenen Wert der Höhe abhängig ist.

Uns ist hier nicht diese Aufgabe gestellt, sondern die umgekehrte; wir sollen aus der wahren Höhe auf die scheinbare schließen. Wir werden also zuerst die Parallaxe anzubringen haben und dann an die mit Parallaxe behaftete Höhe noch die Korrektion für Refraktion, aber nicht etwa umgekehrt.

Ich bezeichne die für Parallaxe bereits korrigierte Höhe, also $h + \Delta h_{\mathrm{II}}$ mit $h_1$, die scheinbare Höhe, wie sie sich durch direkte Messung ergeben hätte, mit $h'$. Dann ist der Betrag der Refraktion, der von der scheinbaren Höhe $h'$ subtrahiert werden muß, um die von der Strahlenbrechung befreite, also hier $h_1$, zu erhalten

$$h' - h_1 = \alpha\, \beta^A\, \gamma^\lambda \operatorname{tg} z' = k_R' \operatorname{tg} z'$$

wo $\alpha$, $A$, $\lambda$ von Bessel in Tafeln gebrachte Funktionen der scheinbaren Zenitdistanz $z'$ und $\beta$ und $\gamma$ von dem Barometer- und Thermometerstande abhängige Faktoren bedeuten, welche für den Zustand der Atmosphäre, für welchen die Werte von $\alpha$ gelten, gleich 1 sind. Möge nun $\Delta h_R$ die Korrektion genannt werden, die an die scheinbare Höhe anzubringen ist, um $h_1$ zu erhalten, also

$$\Delta h_R = h_1 - h'$$

so ist

$$\Delta h_R = - k_R' \operatorname{cotg} h'$$

wo

$$k_R' = F(h', \vartheta, b)$$

wenn mit $\vartheta$ und $b$ der Thermometer- und Barometerstand bezeichnet sind.

Weil nach unserer Voraussetzung nun nicht $h'$ beobachtet, sondern zu berechnen ist, so muß die letzte Gleichung so transformiert werden, daß in ihr nicht mehr $h'$, sondern $h_1$ erscheint. Wir müssen also schreiben, weil $h' = h_1 - \Delta h_R$ ist:

$$\Delta h_R = - F(h_1 - \Delta h_R, \vartheta, b) \operatorname{cotg} (h_1 - \Delta h_R) \ .$$

Die rechte Seite kann nach dem Taylorschen Satze entwickelt werden:

$$\Delta h_R = - F(h_1, \vartheta, b) \operatorname{cotg} h_1 + \Delta h_R \left(\frac{\partial F}{\partial h_1}\right) \operatorname{cotg} h_1 - \frac{F(h_1, \vartheta, b)\, \Delta h_R \sin 1''}{\sin^2 h_1} \ .$$

Für $\Delta h_R$ kann man im zweiten und dritten Gliede (die weiteren Glieder sind, wie eine numerische Untersuchung leicht zeigt, belanglos) einsetzen

$$\Delta h_R = - k_R \operatorname{cotg} h_1$$

wo $k_R = F(h_1, \vartheta, b)$, und man erhält dann

$$\Delta h_R = - F(h_1, \vartheta, b) \operatorname{cotg} h_1 - k_R \operatorname{cotg}^2 h_1 \left(\frac{\partial k_R}{\partial h_1}\right) + k_R^2 \sin 1'' \frac{\operatorname{cotg} h_1}{\sin^2 h_1} \cdots \ .$$

Es wäre nun der Differentialquotient $\left(\frac{\partial k_R}{\partial h_1}\right)$ zu berechnen. Man kann für ihn zunächst die Reihenentwicklung einführen, die $k_R'$ in Potenzen von $\operatorname{cotg} h'$ gibt, indem man also $\left(\frac{\partial k_R}{\partial h_1}\right)$ mit $\left(\frac{\partial k_R'}{\partial h'}\right)$ vertauscht, was für Höhen über 10° hierbei erlaubt ist.

Man hätte also, da $k_R' = 57''.75 - 0''.06954 \operatorname{cotg}^2 h' + 0''.0002654 \operatorname{cotg}^4 h' - 0''.00000174 \operatorname{cotg}^6 h'$ ist,

$$\left(\frac{\partial k_R'}{\partial h'}\right) = + 0''.06954 \frac{2 \operatorname{cotg} h'}{\sin^2 h'} \sin 1'' - 0''.0002654 \frac{4 \operatorname{cotg}^3 h' \sin 1''}{\sin^2 h'} \cdots$$

und dieses gleich $\left(\frac{\partial k_R}{\partial h_1}\right)$ zu setzen und in obiger Formel zu verwenden. Für kleinere Höhen ist diese Reihenentwicklung aber nicht konvergent genug, weil dann die höheren Potenzen von $\operatorname{cotg} h'$ sehr fühlbar werden und an Zahlenwert den ersten Gliedern der Reihe sehr nahe kommen. Als untere Grenze der Höhe kann man etwa 10° annehmen, in kleineren Höhen versagt diese Reihenentwicklung. Man könnte dann $\left(\frac{\partial k_R'}{\partial h'}\right)$ numerisch aus einer Tafel für $k_R'$ bestimmen und für $\left(\frac{\partial k_R}{\partial h_1}\right)$ einsetzen. Bequemer und sicherer ist es jedoch, die vollständige Transformation von $k_R' \operatorname{cotg} h'$ in $k_R \operatorname{cotg} h$ anzuwenden, die Bessel in seiner Arbeit »Über den Einfluß der Strahlenbrechung auf Mikrometerbeobachtungen« gegeben hat. Es möge hier gestattet sein, auf diese Umwandlung etwas ausführlicher einzugehen. Es war

$$- \Delta h_R = k_R' \operatorname{cotg} h' = \alpha\, \beta^A\, \gamma^\lambda \operatorname{cotg} h'$$

gesetzt worden. $\beta$ und $\gamma$ unterscheiden sich nur wenig von der Einheit, noch weniger $A$ und $\lambda$, die erst in sehr geringen Höhen merklich werden.

Für $\Delta h_R$ kann man auch folgende, der obigen analoge Form einsetzen

$$-\Delta h_R = \alpha_1 \beta^{A_1} \gamma^{\lambda_1} \operatorname{cotg} h_1 \ .$$

Man hat also

$$\alpha \beta^A \gamma^\lambda \operatorname{cotg} h' = \alpha_1 \beta^{A_1} \gamma^{\lambda_1} \operatorname{cotg} h_1 = h' - h_1 \ .$$

Setzt man nun denjenigen Zustand der Atmosphäre voraus, für den $\beta$ und $\gamma = 1$, also auch $\beta^A = 1$ und $\gamma^\lambda = 1$ werden, und bezeichnet den für diesen Zustand zu $h_1$ zugehörigen Wert von $h'$ mit $h_0'$ und den zugehörigen Wert von $\alpha$ mit $\alpha_0$, so ist

$$\alpha_0 \operatorname{cotg} h_0' = \alpha_1 \operatorname{cotg} h_1$$

$$\alpha_1 = \frac{\alpha_0 \operatorname{cotg} h_0'}{\operatorname{cotg} h_1} \ .$$

Bezeichnet man ebenso mit $A_0$ und $\lambda_0$ die zu $h_0'$ gehörigen Werte dieser Funktionen der scheinbaren Höhe, so erhält man, weil $A$ und $\lambda$ sich nur sehr langsam ändern und man infolgedessen bei der Entwicklung die höheren Differentialquotienten fortlassen kann

$$A_1 = \frac{A_0}{1 + \frac{\partial (h_1 - h_0')}{\partial h_0'}} \quad \text{und} \quad \lambda_1 = \frac{\lambda_0}{1 + \frac{\partial (h_1 - h_0')}{\partial h_0'}} \ .$$

Die hierbei vorausgesetzte Auflösung der Gleichung

$$h_1 = h_0' + \alpha_0 \operatorname{cotg} h_0'$$

in der $h_1$ bekannt, $h_0'$ aber zu suchen ist, während $\alpha_0$ eine Funktion von $h_0'$, die sich sehr langsam und regelmäßig ändert, darstellt, kann auf die bekannte Weise der Näherungswerte bewerkstelligt werden, wie sie in der Gaußschen Behandlung der Keplerschen Gleichung auftritt. Nur wird man hier wesentlich schneller zum Ziel kommen. Bessel hat auf diese Weise Tafeln gerechnet, die mit dem Argument der wahren Zenitdistanz die $\alpha_1$, $A_1$ und $\lambda_1$ geben.

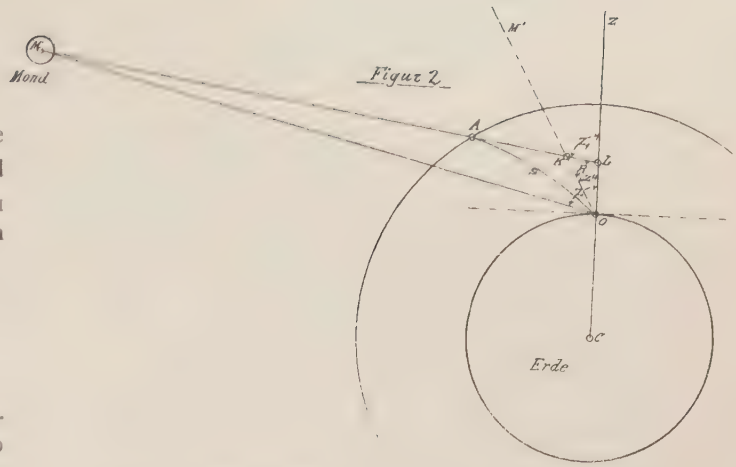
### $\gamma$. Korrektion des Erdhalbmessers.

Für die strenge Rechnung der Höhenkorrektionen beim Monde bedarf es noch einer Korrektion, die infolge der Strahlenbrechung an den Erdhalbmesser des Beobachtungsortes anzubringen ist, auf die Hansen in seiner Theorie der Sonnenfinsternisse zuerst hingewiesen hat.

Man kann die astronomische Strahlenbrechung als den Winkel definieren, den die Tangenten am Anfangs- und Endpunkte der Kurve, welche der Lichtstrahl in der Atmosphäre durchläuft, einschließen. Die Strahlenbrechung wird in der Regel in Funktion des Winkels ausgedrückt, den die Tangente an dem Endpunkt der Kurve des Lichtstrahls (an der Erdoberfläche) mit der Vertikalen durch den Beobachtungsort bildet, d. h. der scheinbaren Zenitdistanz $z'$. Bezeichnet also in Fig. 2 $M$ den Mond, $MAK$ den ungebrochenen Weg des Lichtstrahls, also $AK$ die Tangente an dem Anfangspunkt, $OK$ dieselbe an dem Endpunkt der Kurve $ASO$, die der Lichtstrahl in der Atmosphäre zurücklegt, so ist $ZOM$ die wahre, $ZOM'$ die scheinbare Zenitdistanz, weil man den Mond in der Richtung der Tangente $OK$ sieht. $M'OM$ gleich $R$ wäre also die Refraktion. Nun ist aber

$$\angle KLZ = z_1 = LKO - KOL$$

oder $z_1 = P_1 - z'$




Es soll nun $R = z - z'$ sein, es müßte also auch $z = z_1$, also $MOZ = MLZ$ sein. Dies ist nur dann der Fall, wenn $ML \parallel MO$. Bei der Sonne, den Planeten und den Fixsternen ist diese Bedingung wegen ihrer sehr großen Entfernung zur genüge erfüllt, beim Monde ist aber $z$ von $z_1$ schon merklich verschieden. Hansen hat einen einfachen und sehr bequemen Ausweg gefunden, der die Nähe des Mondes berücksichtigt. Man denkt sich nämlich den Beobachter über dem Erdboden bis $L$ erhoben und rechnet mit einem um $OL$ vergrößerten Erdradius die Parallaxe und mit der mit dieser Parallaxe behafteten Zenitdistanz die Refraktion. Bezeichnet man $OL$ mit $\varrho^0 x$, so ist

$$CL = \varrho^0 (1 + x) \ .$$

Also der korrigierte, um $OL$ vergrößerte Erdhalbmesser ist dann

$$\varrho = \varrho^0 (1 + x) \ .$$

Hansen gibt eine Tafel für $\log (1 + x)$ mit dem Argument wahre Höhe, die auf diese sehr bequeme Weise die Korrektion von $\log \varrho^0$ darstellt. (Tafel II).

### $\delta$. Einfluß der täglichen Aberration auf die Zenitdistanz und den Azimut.

Der Einfluß der täglichen Aberration auf Rektaszension und Deklination eines Gestirns im Sinne scheinbarer weniger wahrer Ort ist bekanntlich der folgende:

$$\mathrm{d}\alpha = + 0''.312 \sec \delta \cos \tau \cos \delta_z$$
$$\mathrm{d}\delta = + 0''.312 \sin \delta \sin \tau \cos \delta_z \ .$$

Setzen wir diese Werte von $\mathrm{d}\alpha$ und $\mathrm{d}\delta$ in die Differentialausdrücke ein, welche die Beziehung zwischen $\mathrm{d}z$ und $\mathrm{d}a$ einerseits, sowie $\mathrm{d}\alpha$ und $\mathrm{d}\delta$ andererseits vermitteln, so erhalten wir zwei Gleichungen für $\mathrm{d}z$ und $\mathrm{d}a$, also für den Einfluß der täglichen Aberration auf die Zenitdistanz und den Azimut.

Differenziert man die Gleichungen

$$\sin z \sin a = \cos \delta \sin \tau$$
$$\sin z \cos a = - \sin \delta \cos \delta_z + \cos \delta \sin \delta_z \cos \tau$$

nach $a$, $z$, $\delta$ und $\tau$, $\mathrm{d}\tau = - \mathrm{d}\alpha$, so erhält man, wenn man noch setzt

$$0''.312 \cos \delta_z = \lambda$$

und für $d\alpha$ und $d\delta$ die obigen Werte einträgt

$$\begin{aligned}\cos z \sin a\, dz + \sin z \cos a\, d\alpha &= \lambda \cos^2\tau + \lambda \sin^2\delta \sin^2\tau = \lambda - \lambda \cos^2\delta \sin^2\tau \\ \cos z \cos a\, dz - \sin z \sin a\, d\alpha &= \lambda \cos\delta \sin\tau (\sin\delta \cos\delta_z - \cos\delta \sin\delta_z \cos\tau) \\ &= -\lambda \cos\delta \sin\tau \sin z \cos a\end{aligned}$$

oder anders geschrieben:

$$\begin{aligned}\cos z \sin a\, dz + \sin z \cos a\, d\alpha &= \lambda - \lambda \sin^2 z \sin^2 a \\ \cos z \cos a\, dz - \sin z \sin a\, d\alpha &= -\lambda \sin^2 z \sin a \cos a\ .\end{aligned}$$

Durch Auflösung dieser Gleichungen nach $dz$ und $d\alpha$ folgt

$$dz = +0''.312 \cos\delta_z \sin a \cos z = -\Delta h_\lambda$$

$$d\alpha = +0''.312 \cos\delta_z \frac{\cos a}{\sin z}\ .$$

Der Einfluß auf die Distanz ist dann

$$+0''.312 \cos\delta_z \frac{\sin(a-A)}{\sin\Delta} (\cos a \cos H - \cos A \cos h)\ .$$

### b. Berechnung von $\Delta H$.

Die Berechnung der Parallaxe, die an $H$ anzubringen ist, wird man nach folgender Formel ausführen

$$-\Delta H_\rho'' = \varrho\, \Pi_s \cos H_\rho \cdots$$

wo $H_\rho = H + (\delta_z - \delta_\rho)\cos A$ zu setzen ist. Das zweite Glied wird z. B. bei der Sonne erst in der zweiten Dezimale der Bogensekunde merklich.

Die tägliche Aberration wird man ganz analog wie beim Monde und die Refraktion nach den oben erwähnten Besselschen Tafeln rechnen.

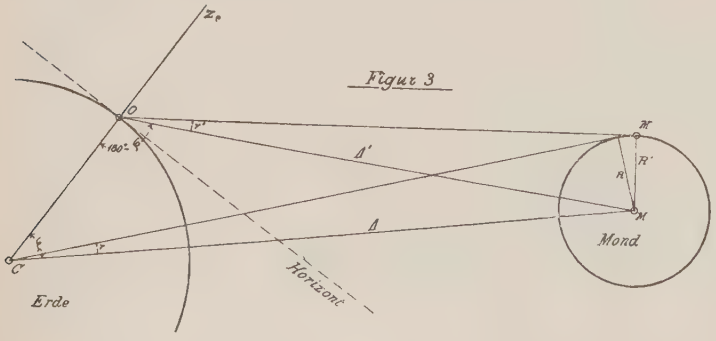
Natürlich wird die Korrektion für Parallaxe bei $\Delta H$ ganz fortfallen, sobald man die Distanz des Mondes von einem Fixstern mißt.

## Korrektionen wegen des Halbmessers.

Es war bisher in allen Entwicklungen vorausgesetzt worden, daß die Distanz der Mittelpunkte gemessen sei, indem die dieser Annahme gemäß beobachtete Distanz $\Delta'$ mit der berechneten $\Delta$ verglichen wurde. In der Praxis aber wird bisher die Distanz des Mondrandes von dem anderen Gestirn oder dessen Rande gemessen, und es ist jetzt diesem Umstande Rechnung zu tragen. Dies geschieht am einfachsten dadurch, daß man an die beobachtete Ränderdistanz $\Delta''$ die beiden Halbmesser anbringt, wie sie dem Beobachter zur Zeit der Messung erscheinen mußten. Da man nun aus der betreffenden Mondephemeride, bezw. der Ephemeride des anderen Gestirns nur den vom Beobachtungsorte unabhängigen geozentrischen Wert des scheinbaren Halbmessers entnehmen kann, so müßte man an diesen die Korrektion für die Vergrößerung des scheinbaren Halbmessers durch die Annäherung (parallaktische Vergrößerung) und die Korrektion für Refraktion anbringen, um den Wert des Halbmessers zu erhalten, wie er direkt beobachtet worden wäre. Es soll im folgenden die Entwicklung der hierfür nötigen Formeln gegeben werden.

### a. Korrektion für die parallaktische Vergrößerung des Halbmessers.

Auch hier möge der Kürze halber stets auf den Mond Bezug genommen werden, für den die strengsten Formeln abgeleitet werden müssen.




Sei $r_m$ der aus der Ephemeride genommene geozentrische Wert des scheinbaren Mondhalbmessers, $r_m'$ der vom Beobachtungsorte abhängige, und mögen die aus Figur 3 leicht ersichtlichen Bezeichnungen angewandt werden, wobei die Zenitdistanzen $\zeta'$ und $\zeta$ eingeführt sind, so hat man

$$\sin r_m = \frac{R}{\Delta}$$

$$\sin r_m' = \frac{R}{\Delta'}$$

wo $r_m$ und $r_m'$ die Winkel sind, unter denen man vom Erdmittelpunkt resp. vom Beobachtungsort aus den Halbmesser $R$ des Mondes sieht.

Hieraus folgt

$$\sin r_m' = \frac{\Delta}{\Delta'} \sin r_m\ .$$

Nun ist aber

$$\frac{\Delta}{\Delta'} = \frac{\sin\zeta'}{\sin\zeta}$$

mithin

$$\sin r_m' = \frac{\sin\zeta'}{\sin\zeta} \sin r_m\ .$$

In Figur 1 sieht man aus dem sphärischen Dreieck $ZZ_\rho(M)$, daß

$$Z_\rho M = Z_\rho(M) - M(M)$$

oder in unseren Bezeichnungen

$$\zeta = \zeta' - M(M)$$

wo $M(M) = \zeta' - \zeta =$ der Parallaxe des Mondes ist.

Wenn wir für $\zeta$ diesen Wert einsetzen, erhalten wir:

$$\sin r_m' \sin(\zeta' - M(M)) = \sin\zeta' \sin r_m$$

und wenn entwickelt wird:

$$\sin\zeta'\,(r_m' - r_m)\sin 1'' = r_m'\cos\zeta'\sin M(M)\sin 1'' + 2\,r_m'\sin\zeta'\sin^2 {}^1\!/_2\,M(M)\sin 1''\,.$$

Für $\sin M(M)$ setzen wir aus der Parallaxenformel seinen Wert ein

$$\sin(M)\,M = \varrho\sin\Pi_m\cos h_\varrho' = \varrho\sin\Pi_m\sin\zeta'$$

der ja streng gilt. Für das quadratische Glied kann man natürlich genau genug setzen:

$${}^1\!/_2\,M(M) = {}^1\!/_2\,\varrho\,\Pi_m\sin\zeta'$$

also $$\sin {}^1\!/_2\,M(M) = {}^1\!/_2\,\varrho\sin\Pi_m\sin\zeta'$$

und schließlich

$$\sin^2 {}^1\!/_2\,M(M) = {}^1\!/_4\,(\varrho\sin\Pi_m)^2\sin^2\zeta'$$

sodaß

$$r_m' - r_m = r_m'\cos\zeta'\,\varrho\sin\Pi_m + {}^1\!/_2\,r_m'\,(\varrho\sin\Pi_m)^2\sin^2\zeta'.$$

Es sollen nun zur Abkürzung folgende Ausdrücke eingeführt werden:

$$\varrho\sin\Pi_m\cos\zeta' = K$$
$$\varrho\sin\Pi_m\sin\zeta' = L\,.$$

Dann schreibt sich die Gleichung folgendermaßen:

$$r_m' - r_m = r_m'\,K + {}^1\!/_2\,r_m'\,L^2$$
$$r_m' - r_m = (r_m + r_m' - r_m)\,(K + {}^1\!/_2\,L^2)$$
$$r_m' - r_m = r_m\,(K + {}^1\!/_2\,L^2) + (r_m' - r_m)\,K + {}^1\!/_2\,(r_m' - r_m)\,L^2\,.$$

Das letzte Glied ist so klein, daß es vernachlässigt werden kann.

$$(r_m' - r_m)\,(1 - K) = r_m\,(K + {}^1\!/_2\,L^2)$$

$$r_m' - r_m = r_m\,\frac{(K + {}^1\!/_2\,L^2)}{1 - K}\,.$$

Da nun $K$ ebenso wie $L$ klein ist (beide sind von dem Sinus der Parallaxe abhängig und nur noch mit $\varrho\cos\zeta'$ resp. $\varrho\sin\zeta'$ multipliziert, welche Ausdrücke höchstens den Wert 1 erreichen), so kann man $1 - K$ in dem Gliede $\frac{1}{2}\,\frac{r_m\,L^2}{1-K}$, das sich durch Auflösung der Klammer ergibt, ohne Genauigkeitsverlust gleich 1 setzen. Dann ist

$$r_m' - r_m = \frac{r_m\,K}{1-K} + {}^1\!/_2\,L^2\,r_m\,.$$

Wir führen nach dieser Umgestaltung für $K$ und $L$ die oben substituierten Ausdrücke wieder ein, schreiben aber jetzt $\sin h_\varrho'$ statt $\cos\zeta'$ und $\cos h_\varrho'$ statt $\sin\zeta'$, welche Bezeichnungen den obigen Parallaxenformeln mehr entsprechen, und setzen also:

$$K = \varrho\sin\Pi_m\sin h_\varrho'$$
$$L = \varrho\sin\Pi_m\cos h_\varrho' \qquad h_\varrho' = h_\varrho + \Delta h_\varrho$$
$$K = \varrho\sin\Pi_m\sin(h_\varrho + \Delta h_\varrho) = \varrho\sin\Pi_m\,(\sin h_\varrho\cos\Delta h_\varrho + \cos h_\varrho\sin\Delta h_\varrho)\,.$$

Es wird nun wieder gesetzt

$$\cos\Delta h_\varrho = 1\,, \qquad \sin\Delta h_\varrho = \Delta h_\varrho''\sin 1''.$$

Also hat man:

$$K = \varrho\sin\Pi_m\,(\sin h_\varrho + \Delta h_\varrho\sin 1''\cos h_\varrho)\,.$$

$L$ entwickelt man ähnlich:

$$L = \varrho\sin\Pi_m\,(\cos h_\varrho - \Delta h_\varrho\sin 1''\sin h_\varrho)\,.$$

Schließlich setzt man für $\frac{K}{1-K}$ die Reihe ein:

$$\frac{K}{1-K} = K + K^2 + K^3 + \cdots$$

und erhält für $r_m' - r_m$ folgenden Wert:

$$r_m' - r_m = r_m\,(K + K^2 + \cdots + {}^1\!/_2\,L^2)\,.$$

Da ferner aus der früher abgeleiteten Parallaxenformel sich ergeben hatte

$$\Delta h_\varrho\sin 1'' = -\,\varrho\sin\Pi_m\cos h_\varrho$$

so erhalten wir nach Einsetzung aller Werte:

$$r_m' - r_m = r_m\,(\varrho\sin\Pi_m\sin h_\varrho + \varrho\sin\Pi_m\cos h_\varrho\,\Delta h_\varrho\sin 1'') + r_m\,(\varrho\sin\Pi_m\sin h_\varrho)^2\cdots + {}^1\!/_2\,r_m\,(\varrho\sin\Pi_m\cos h_\varrho)^2\cdots$$
$$r_m' - r_m = r_m\,[\varrho\sin\Pi_m\sin h_\varrho - {}^1\!/_2\,(\varrho\sin\Pi_m)^2\,(1 - 3\sin^2 h_\varrho)]$$

und es möge hierfür folgende Endform gewählt werden:

$$r_m' - r_m = r_m\,[\varrho\,\Pi_m\sin 1''\sin h_\varrho + {}^1\!/_2\,(\varrho\,\Pi_m\sin 1'')^2\,(3\sin^2 h_\varrho - 1)]\,.$$

Auch hier kann man ungefähre Mittelwerte des Radius und der Parallaxe einführen und erhält:

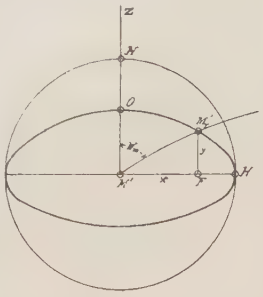
$$r_m' - r_m = +\underset{[1.21986]}{16''.59}\left(\frac{r_m''}{1000}\right)\left(\frac{\varrho\,\Pi_m''}{3422}\right)\sin h_\varrho + \underset{[9.1387]}{0''.138}\left(\frac{r_m''}{1000}\right)\left(\frac{\varrho\,\Pi_m''}{3422}\right)^2(3\sin^2 h_\varrho - 1)\,.$$

Die Berechnung dieser Formel ist mit Hilfe der Tafeln V und VII sehr leicht durchzuführen. Sie gibt den Unterschied zwischen dem vom Beobachtungsorte abhängigen und dem geozentrischen Werte des scheinbaren Halbmessers bis auf $1/100$ der Bogensekunde.

### b. Refraktion.

Infolge der Strahlenbrechung wird der Mond in vertikaler Richtung zusammengedrückt und elliptisch erscheinen.

Sei in Fig. 4 $M'$ der Mondmittelpunkt, $M'M_r'$ die Richtung nach $S'$, $M'O$ die nach dem Zenit, $M'H$ die dazu senkrechte, also die halbe große Achse unserer Ellipse, und außerdem die Senkrechte $M_r'F$ auf $M'H$ gefällt, so sei bezeichnet $M'M_r' = r_m'$ und $OM'M_r' = W_m$, wie es sich auch aus der Betrachtung der Figur 1 ergibt.



Figur 4.

Setzen wir noch

$$M'F = x \qquad M'H = a$$
$$M_r'F = y \qquad M'O = b$$

so ist

$$x = r_m' \sin W_m$$
$$y = r_m' \cos W_m$$

ferner die Gleichung der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 .$$

Ferner haben wir zwischen $a$ und $b$ folgende leicht ersichtliche Beziehung:

$$b = a\left(1 + \frac{\partial R}{\partial h'}\right)$$

wo $\frac{\partial R}{\partial h'}$ die Zusammendrückung der Radiuseinheit des Mondes in der Vertikalen bedeutet. Man findet ferner

$$r_m'^2\left(\sin^2 W_m + \frac{a^2}{b^2}\cos^2 W_m\right) = a^2$$

da $x^2 + \frac{a^2}{b^2}y^2 = a^2$ ist.

$a$ setzen wir gleich $r'$, dem aus der Parallaxengleichung abgeleiteten Horizontalwert des Radius, wie er vom Beobachtungsorte aus erscheint. Dieser ist also nicht von der Refraktion beeinflußt, die ja in der horizontalen Komponente gleich null ist.

$$r_m'^2\left(\sin^2 W_m + \frac{a^2}{b^2}\cos^2 W_m\right) = r'^2 .$$

Hiermit nehmen wir folgende einfachen Umformungen vor. Es ist

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{b^2 + a^2 - b^2}{b^2} = 1 + \frac{(a+b)(a-b)}{b^2}$$

also

$$r_m'^2\left(\sin^2 W_m + \cos^2 W_m + \frac{(a+b)(a-b)}{b^2}\cos^2 W_m\right) = r'^2$$

$$r_m'^2 + r_m'^2\frac{(a+b)(a-b)}{b^2}\cos^2 W_m = r'^2 .$$

Nun ist

$$a + b = 2a + a\frac{\partial R}{\partial h'}, \qquad a - b = -a\frac{\partial R}{\partial h'}, \qquad b^2 = a^2\left(1 + \frac{\partial R}{\partial h'}\right)^2$$

$$r_m'^2 + r_m'^2\frac{\left(2a + a\frac{\partial R}{\partial h'}\right)\left(-a\frac{\partial R}{\partial h'}\right)\cos^2 W_m}{a^2\left(1 + \frac{\partial R}{\partial h'}\right)^2} = r'^2 , \qquad r_m'^2 - r_m'^2\frac{\left(2 + \frac{\partial R}{\partial h'}\right)\frac{\partial R}{\partial h'}}{1 + 2\frac{\partial R}{\partial h'} + \left(\frac{\partial R}{\partial h'}\right)^2}\cos^2 W_m = r'^2 .$$

Bezeichnet man nun $2\frac{\partial R}{\partial h'} + \left(\frac{\partial R}{\partial h'}\right)^2$ mit $\sigma$, so wird

$$r_m'^2 - r_m'^2\frac{\sigma}{1+\sigma}\cos^2 W_m = r'^2$$

und, wenn man $\frac{\sigma}{1+\sigma}$ in eine Reihe entwickelt

$$r_m'^2 - r_m'^2\left[2\frac{\partial R}{\partial h'} - 3\left(\frac{\partial R}{\partial h'}\right)^2 \cdots\right]\cos^2 W_m = r'^2$$

mit Vernachlässigung unbedeutender Glieder. Hieraus erhält man leicht

$$r_m'\sqrt{1 - 2\frac{\partial R}{\partial h'}\cos^2 W_m + 3\left(\frac{\partial R}{\partial h'}\right)^2\cos^2 W_m} = r'$$

$$r_m'\left[1 - \frac{\partial R}{\partial h'}\cos^2 W_m + \frac{3}{2}\left(\frac{\partial R}{\partial h'}\right)^2\cos^2 W_m \cdots\right] = r' .$$

Mithin

$$r_m' - r' = r'\frac{\partial R}{\partial h'}\cos^2 W_m - \frac{3}{2}r'\left(\frac{\partial R}{\partial h'}\right)^2\cos^2 W_m .$$

Zur Berechnung des Differentialquotienten $\frac{\partial R}{\partial h'}$ haben wir die Refraktionsformel zu differenzieren:

$$R = k_R' \operatorname{cotg} h'$$

$$\frac{\partial R}{\partial h'} = -\frac{k_R'}{\sin^2 h'} \sin 1'' + \left(\frac{\partial k_R}{\partial h'}\right) \operatorname{cotg} h' \ .$$

$\frac{\partial k_R'}{\partial h'}$ bestimmt man am zweckmäßigsten aus einer Tafel für $k_R'$ numerisch. Für $h'$ setzt man $h + \Delta h$, wo $\Delta h$ bereits vorher gefunden ist. In Tafel VI ist diese Rechnung wesentlich erleichtert. Da man nämlich das Glied $-\frac{3}{2}\left(\frac{\partial R}{\partial h'}\right)^2 \cos^2 W_m$ wegen seiner Kleinheit, die aus der Tafel ersichtlich ist, stets fortlassen kann, so hat man in erster Näherung nur $\left(\frac{r'}{1000}\right)\cos^2 W_m$ mit dem als Funktion von $h'$ tabulierten Ausdruck $-\frac{k_R' \sin 1''}{\sin^2 h'}$ zu multiplizieren, in zweiter Näherung ebenfalls $\left(\frac{r'}{1000}\right)\cos^2 W_m$ mit $+\frac{\partial k_R'}{\partial h'} \operatorname{cotg} h'$, welches ebenfalls mit dem Argument $h' = h + \Delta h$ in Bogensekunden gegeben ist (Tafel VIII).

## Zusammenstellung der Formeln und Übersicht des Ganges der Rechnung.

Es ist nunmehr nötig, eine Übersicht des Ganges der Rechnung zu geben und gleichzeitig das in der Einleitung nur Angedeutete näher zu präzisieren.

Es war die Annahme gemacht worden, daß an einem in Länge und Breite genähert bekannten Beobachtungsorte die Distanz eines Mondrandes von dem eines anderen Gestirns gemessen worden sei, wir bezeichnen sie mit $\Delta''$. Es war die Aufgabe, mit Hilfe der genähert bekannten Ortszeit sowie dieser Koordinaten des Beobachtungsortes die Distanz zu rechnen und den erhaltenen Wert mit dem beobachteten zu vergleichen. Der Unterschied zwischen beobachteter und berechneter Distanz ist offenbar eine Funktion der Korrektionen, die an die bei der Rechnung benutzten Größen anzubringen sind. Von den Beobachtungsfehlern ist hierbei abgesehen.

Sei also auf der genähert bekannten geographischen Breite $\delta_g{}^0$ zur Uhrzeit $U^0$ des betreffenden bei der Beobachtung benutzten Chronometers die Distanz $\Delta''$ gemessen. Aus einer Gangtabelle entnimmt man, daß $U^0$ um $\Delta U_g{}^0$ zu korrigieren ist, um die genäherte Greenwicher Zeit (bezw. die eines anderen Normalmeridians) zu erhalten.

Ferner hat man (bei der nautischen Anwendung durch Messung von Sonnenhöhen) festgestellt, daß der Stand des Chronometers gegen Ortszeit $\Delta U^0$ beträgt, also zur genäherten Ortszeit $U^0 + \Delta U^0$ beobachtet ist. Der Unterschied der Ortszeit gegen Greenwicher Zeit ist aber die Länge. Einen Näherungswert derselben erhält man also aus folgender Formel:

$$(U^0 + \Delta U^0) - (U^0 + \Delta U_g{}^0) = \Delta U^0 - \Delta U_g{}^0 = \lambda^0 = \text{der genäherten östlichen Länge.}$$

Nennen wir die genäherte Greenwicher Zeit der Beobachtung $G^0$, so ist

$$G^0 = U^0 + \Delta U_g{}^0 \ .$$

Für diese genäherte Greenwicher Zeit entnimmt man einer Ephemeridensammlung folgende Näherungswerte, die ebenfalls mit dem Näherungszeichen o bezeichnet werden sollen:

$\Delta^0$ = wahre Distanz der Mittelpunkte beider Gestirne, eventuell aus den $\alpha$ und $\delta$ zu rechnen

$\alpha_m{}^0$ = Rektaszension, $\delta_m{}^0$ = Deklination } des Mondes

$\alpha_s{}^0$ = Rektaszension, $\delta_s{}^0$ = Deklination } des Gestirns, dessen Distanz vom Monde gemessen wurde

$\odot_\alpha{}^0$ = Rektaszension der mittleren Sonne zur Zeit $G^0$, die man durch Interpolation zwischen den Sternzeiten im mittleren Mittag desselben und des folgenden Tages erhält.

Ferner $\Pi_m{}^0$ = Mondparallaxe, $\Pi_s{}^0$ = Parallaxe des Gestirns,

$r_m{}^0$ = Halbmesser des Mondes, $r_s{}^0$ = Halbmessers des Gestirns,

sowie gleichzeitig die Änderungen dieser Werte für ein einheitliches Zeitintervall, etwa eine Minute mittlerer Zeit, also

$$\frac{d\Delta^0}{dG}, \ \frac{d\alpha_m{}^0}{dG}, \ \frac{d\delta_m{}^0}{dG}, \ \frac{d\alpha_s{}^0}{dG}, \ \frac{d\delta_s{}^0}{dG}, \ \frac{d\odot_\alpha{}^0}{dG}, \ \frac{d\Pi_m{}^0}{dG}, \ \frac{d\Pi_s{}^0}{dG}, \ \frac{dr_m{}^0}{dG}, \ \frac{dr_s{}^0}{dG} \ .$$

Es wird nötig sein, um ganz streng rechnen zu können, bei Entnahme von $\frac{d\Delta^0}{dG}, \frac{d\alpha_m{}^0}{dG}, \frac{d\delta_m{}^0}{dG}$ auch die zweiten Differenzen zu berücksichtigen, weil diese Änderungen sehr beträchtlich sind.

Bezeichnet man dann noch die Ortszeit (und zwar die genäherte) der Beobachtung mit $T^0$, die Sternzeit mit $\alpha_z{}^0$ (= Rektaszension des Zenits zur Beobachtungszeit), sodaß man hat $T^0 = U^0 + \Delta U^0 = G^0 + \lambda^0$

so erhält man die Stundenwinkel aus den Gleichungen:

$$\tau_m^0 = \alpha_z^0 - \alpha_m^0, \quad \tau_s^0 = \alpha_z^0 - \alpha_s^0, \quad \alpha_z^0 = T^0 + \odot\alpha^0.$$

Nunmehr hat man folgende Gleichungsgruppen mit den bekannten goniometrischen Umformungen durchzurechnen, um die wahren Höhen, die wahren Azimute und die Winkel am Mond und am Stern, $W_m$ und $W_s$, zu erhalten:

$$\begin{aligned}
\cos h^0 \sin a^0 &= \sin \tau_m^0 \cos \delta_m^0 & \cos H^0 \sin A^0 &= \sin \tau_s^0 \cos \delta_s^0 \\
\cos h^0 \cos a^0 &= -\sin \delta_m^0 \cos \delta_z^0 + \cos \delta_m^0 \sin \delta_z^0 \cos \tau_m^0 & \cos H^0 \cos A^0 &= -\sin \delta_s^0 \cos \delta_z^0 + \cos \delta_s^0 \sin \delta_z^0 \cos \tau_s^0 \\
\sin h^0 &= \sin \delta_m^0 \sin \delta_z^0 + \cos \delta_m^0 \cos \delta_z^0 \cos \tau_m^0 & \sin H^0 &= \sin \delta_s^0 \sin \delta_z^0 + \cos \delta_s^0 \cos \delta_z^0 \cos \tau_s^0
\end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(W_m^0 + W_s^0) = \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(a^0 - A^0) \frac{\cos \tfrac{1}{2}(h^0 - H^0)}{\sin \tfrac{1}{2}(h^0 + H^0)}, \quad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(W_m^0 - W_s^0) = \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(a^0 - A^0) \frac{\sin \tfrac{1}{2}(h^0 - H^0)}{\cos \tfrac{1}{2}(h^0 + H^0)}.$$

Als Kontrolle der Rechnung kann folgende Formel dienen:

$$\cos \Delta^0 = \sin h^0 \sin H^0 + \cos h^0 \cos H^0 \cos (a^0 - A^0).$$

$\Delta^0$ hieraus muß mit dem aus der Ephemeride interpolierten Werte übereinstimmen. Nunmehr rechnet man

$$h_\rho^0 = h^0 + (\delta_z^0 - \delta_\rho^0) \cos a^0$$

wo $\delta_z^0 - \delta_\rho^0$ mit dem Argument $\delta_z^0$ der bekannten Tafel entnommen wird, die gleichzeitig $\varrho^0$ gibt.

Für die Erleichterung der folgenden Rechnung benutze man die am Rande vermerkten Tafeln; es wird

Tafel I
$$-(\Delta h_\rho)_1 = \varrho^0 \Pi_m^0 \cos h_\rho + 28''3887 \left(\frac{\varrho^0 \Pi_m^0}{3422}\right)^2 \sin 2 h_\rho^0.$$

Mit dem Argument $h_\rho^0 + (\Delta h_\rho)_1$ geht man in Tafel II ein und entnimmt ihr $\log(1 + x)$. Addiert man dies zu $\log \varrho^0$, so hat man $\log \varrho$ und erhält $\Delta h_\rho$ aus

Tafel II
$$-\sin \Delta h_\rho = \varrho^0 \sin \Pi_m^0 \cos [h_\rho^0 + (\Delta h_\rho)_1].$$

und schließlich

$$\Delta h_{II} = \Delta h_\rho + 0''019 \frac{\varrho^0 \Pi_m^0}{3422} \left(\frac{\delta_z^0 - \delta_\rho^0}{690}\right)^2 \sin^2 a^0 \cos h^0.$$

Wenn das andere Gestirn überhaupt eine Parallaxenrechnung nötig hat, so erhält man $\Delta H_\rho$ aus

$$-\Delta H_{II} = -\Delta H_\rho = \varrho^0 \Pi_s^0 \cos H_\rho^0$$

wo $H_\rho^0 = H^0 + (\delta_z^0 - \delta_\rho^0) \cos A^0$ ist.

Die Refraktion erhält man aus Tafel III$^{a\text{-}f}$. Mit den Argumenten $\vartheta$ = Thermometerstand, $b$ = Barometerstand zur Zeit der Beobachtung entnimmt man ihr die Koeffizienten $\gamma$ und $\beta$, sodann mit dem Argument $h^0 + \Delta h_\rho$ die Werte $\alpha_1$, $A_1$ und $\lambda_1$ und hat

$$-\Delta h_R = \alpha_1 \beta^{A_1} \gamma^{\lambda_1} \operatorname{cotg} (h^0 + \Delta h_\rho), \quad \Delta h_\lambda = -0''312 \cos \delta_z^0 \sin a^0 \sin h^0.$$

Auf dieselbe Weise wird $\Delta H_R$ und $\Delta H_\lambda$ berechnet. Es ist jetzt

Tafeln III$^{a\text{-}f}$
$$\Delta h = \Delta h_\rho - \Delta h_R + \Delta h_\lambda, \qquad \Delta H = \Delta H_\rho - \Delta H_R + \Delta H_\lambda.$$

Nun kann die Distanzformel gerechnet werden, wo $u^0$ den entsprechenden Näherungswert von $u = \Delta' - \Delta$ bezeichnen möge und wo der Indexstrich oben bedeutet, daß der bezügliche Winkelwert in Bogenminuten ausgedrückt ist:

$$\begin{aligned}
u^0 = &\left\{ -\Delta h \cos W_m^0 - \Delta H \cos W_s^0 \right\} \\
&+ \left\{ \underset{[1.33879]}{21''817} \left(\frac{\Delta h'}{50}\right)^2 \sin^2 W_m^0 \operatorname{cotg} \Delta^0 - \underset{[0.24188]}{1''745} \left(\frac{\Delta h' \Delta H'}{100}\right) \frac{F^0}{\sin \Delta^0} + 0''312 \frac{\cos \delta_z^0}{\sin \Delta^0} \sin (a^0 - A^0) (\cos a^0 \cos H^0 - \cos A^0 \cos h^0) \right. \\
&\left. + \varrho \sin (\delta_z^0 - \delta_\rho^0) \Pi_m^0 \frac{\sin a^0}{\sin \Delta^0} \cos H^0 \left[ \sin (a^0 - A^0) - \underset{[8.1627]}{0.0154} \left(\frac{\Delta h'}{50}\right) \frac{\cos W_s^0 \sin W_m^0}{\cos h^0} \right] \right\} \\
&+ \left\{ \underset{[9.0244]}{0''106} \left(\frac{\Delta h'}{50}\right)^3 \cos W_m^0 \sin^2 W_m^0 (1 + 3 \operatorname{cotg}^2 \Delta^0) + \underset{[9.3388]}{0''218} \left(\frac{\Delta H'}{5}\right)^2 \sin^2 W_s^0 \operatorname{cotg} \Delta^0 \right. \\
&\left. - \varrho \frac{\sin (\delta_z^0 - \delta_\rho^0)}{\sin \Delta^0} \sin (a^0 - A^0) \left[ \Pi_s^0 \sin A^0 \cos h^0 + \underset{[7.1627]}{0.0015} \left(\frac{\Delta H'}{5}\right) \Pi_m^0 \sin a^0 \sin H^0 \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Tafel IV

$$F^0 = \sin h^0 \sin H^0 \cos (a^0 - A^0) + \cos h^0 \cos H^0 + \cos W_m^0 \cos W_s^0 \cos \Delta^0.$$

Die Halbmesser-Korrektionen erhält man aus folgenden Gleichungen:

Tafel V und VII
$$(\Delta r)_\rho = + \underset{[1.219846]}{16''59} \left(\frac{r_m^0}{1000}\right) \left(\frac{\varrho \Pi_m^0}{3422}\right) \sin h_\rho + \underset{[9.1399]}{0''138} \left(\frac{r_m^0}{1000}\right) \left(\frac{\varrho \Pi_m^0}{3422}\right)^2 (3 \sin^2 h_\rho - 1)$$

$$(\Delta r)_R = -\frac{k_R' \sin 1'' \cos^2 W_m^0}{\sin^2 (h^0 + \Delta h)} r_m^0 + \frac{\partial k_R'}{\partial h'} \operatorname{cotg} (h^0 + \Delta h) \cos^2 W_m^0 r_m^0 \ .$$

Tafel VI u. VIII

Dann ist

$$r_m' = r_m^0 + (\Delta r)_\varrho + (\Delta r)_R \ .$$

Ebenso kann man auch, wenn es überhaupt nötig sein sollte, $r_s'$ berechnen.

Bildet man nun

$$(\Delta'')^0 = \Delta^0 + u^0 \pm r_m' \pm r_s'$$

wo die Zeichen nach der Art der Messung (zugekehrte oder abgewandte Ränder) zu wählen sind, so hat man dadurch die mit Parallaxe und Refraktion behaftete scheinbare Distanz berechnet. Diese würde genau mit der beobachteten übereinstimmen, wenn die Grundlagen der Rechnung streng wären und außerdem keine Beobachtungsfehler vorhanden wären. Da dies nicht der Fall ist, so wird sich ein Unterschied zwischen $\Delta''_{\text{Beob.}}$ und $(\Delta'')^0_{\text{Ber.}}$ ergeben, der einmal von zufälligen Beobachtungsfehlern und zweitens von den benutzten nicht völlig strengen Grundlagen der Rechnung, die ja nur Näherungswerte waren, herrührt. Er wird also, wenn man von den Beobachtungsfehlern absieht, vor allem eine Funktion der Korrektionen sein, die man an die Näherungswerte anzubringen hat, um strenge Werte zu erhalten.

## Differentiation der Distanzformel.

Es war nach früheren Formeln

$$\lambda^0 = T^0 - G^0 \ .$$

Um das strenge $T$ und $G$ zu erhalten, habe man an $T^0$ und $G^0$ die Korrektionen $\mathrm{d}T$ und $\mathrm{d}G$ anzubringen, so daß also wird

$$T = T^0 + \mathrm{d}T \qquad G = G^0 + \mathrm{d}G \ .$$

Folglich ist die Korrektion der geographischen Länge

$$\mathrm{d}\lambda = \mathrm{d}T - \mathrm{d}G \ .$$

Für $T^0$ hatten wir auch folgenden Ausdruck

$$T^0 = \alpha_z^0 - \odot_\alpha^0 \ .$$

Bezeichnet man also die Korrektion, die an die Sternzeit der Beobachtung anzubringen ist, mit $x$, ferner $\frac{\mathrm{d}\odot_\alpha^0}{\mathrm{d}G}$ mit $\varepsilon$, welches gleich $\frac{1}{365.24}$ ist und für eine Minute mittlerer Sonnenzeit $0^s.164$ beträgt, so hat man

$$x = \mathrm{d}T + \varepsilon\, \mathrm{d}G \ .$$

Für $\mathrm{d}T$ kann man auch $\mathrm{d}\lambda + \mathrm{d}G$ einführen, wenn etwa $\mathrm{d}G$ sicherer bekannt sein sollte als $\mathrm{d}T$ und hätte dann

$$x = \mathrm{d}\lambda + \mathrm{d}G\,(1 + \varepsilon) \ .$$

Es war nun $\Delta^0$ aus der Ephemeride für die Zeit $G^0$ interpoliert worden. Eine Änderung von $G^0$ um $\mathrm{d}G$ hat eine Änderung von $\Delta^0$ um $\frac{\mathrm{d}\Delta^0}{\mathrm{d}G}\mathrm{d}G$ zur Folge. Dasselbe gilt für alle anderen Korrektionen. Man muß also die Endformel nach allen bei der Rechnung benutzten Näherungswerten differenzieren, um sich über den Einfluß der Fehler dieser Näherungswerte klar zu werden und auf die Korrektionen schließen zu können.

Differenziert man also die Endformel

$$(\Delta'')^0_{\text{Ber.}} = \Delta^0 + u^0 \pm r_m'^0 \pm r_s'^0$$

so erhält man, wenn man die Radien als konstant ansieht, was auf die Genauigkeit durchaus keinen Einfluß hat, wie man sich leicht überzeugen kann, folgende Gleichung:

$$\text{Beob.} - \text{Ber.} = \mathrm{d}G\left(\frac{\mathrm{d}\Delta^0}{\mathrm{d}G} + \frac{\mathrm{d}u^0}{\mathrm{d}G}\right) + x\left(\frac{\mathrm{d}u^0}{\mathrm{d}\alpha_z}\right) + y\left(\frac{\mathrm{d}u^0}{\mathrm{d}\delta_z}\right) \ .$$

Hierbei bezeichnet $y$ die Korrektion der genäherten Polhöhe.

Für $\mathrm{d}G$ kann man $\mathrm{d}T - \mathrm{d}\lambda$ und für $x$ $\mathrm{d}T(1 + \varepsilon) - \varepsilon\,\mathrm{d}\lambda$ eintragen und erhält

$$\text{Beob.} - \text{Ber.} = -\mathrm{d}\lambda\left(\frac{\mathrm{d}\Delta^0}{\mathrm{d}G} + \frac{\mathrm{d}u^0}{\mathrm{d}G} + \varepsilon\frac{\mathrm{d}u^0}{\mathrm{d}\alpha_z}\right) + \mathrm{d}T\left(\frac{\mathrm{d}\Delta^0}{\mathrm{d}G} + \frac{\mathrm{d}u^0}{\mathrm{d}G} + (1+\varepsilon)\frac{\mathrm{d}u^0}{\mathrm{d}\alpha_z}\right) + y\frac{\mathrm{d}u^0}{\mathrm{d}\delta_z} \ .$$

Hierzu kann man für ganz genaue Messungen auch noch die Glieder hinzufügen, die aus Fehlern der Koordinaten der beiden Gestirne herrühren, also auf die rechte Seite noch nehmen

$$+\frac{\mathrm{d}\Delta^{0\prime}}{\mathrm{d}\alpha_m}\mathrm{d}\alpha_m + \frac{\mathrm{d}\Delta^{0\prime}}{\mathrm{d}\delta_m}\mathrm{d}\delta_m + \frac{\mathrm{d}\Delta^{0\prime}}{\mathrm{d}\alpha_s}\mathrm{d}\alpha_s + \frac{\mathrm{d}\Delta^{0\prime}}{\mathrm{d}\delta_s}\mathrm{d}\delta_s + \frac{\mathrm{d}\Delta^{0\prime\prime}}{\mathrm{d}\Pi_m}\mathrm{d}\Pi_m + \frac{\mathrm{d}\Delta^{0\prime\prime}}{\mathrm{d}\varrho}\mathrm{d}\varrho + \frac{\mathrm{d}\Delta^{0\prime\prime}}{\mathrm{d}(\delta_z - \delta_\varrho)}\mathrm{d}(\delta_z - \delta_\varrho) \ .$$

Ich beginne nun mit der Berechnung der einzelnen Differentialquotienten.

$\frac{\mathrm{d}\Delta^0}{\mathrm{d}G}$ war aus der Ephemeride interpoliert worden. Um $\frac{\mathrm{d}u^0}{\mathrm{d}G}$ zu berechnen, kann man sich, wenn nicht sehr grobe Korrektionen zu erwarten sind, mit der ersten Näherung von $u^0$ begnügen uud diese differenzieren. Es war

$$u^0 = -\Delta h \cos W_m - \Delta H \cos W_s$$

$$\mathrm{d}u^0 = -\mathrm{d}\Delta h \cos W_m - \mathrm{d}\Delta H \cos W_s + \Delta h \sin W_m \sin 1''\, \mathrm{d}W_m + \Delta H \sin W_s \sin 1''\, \mathrm{d}W_s$$

$$\frac{\mathrm{d}u^0}{\mathrm{d}G} = -\frac{\mathrm{d}\Delta h}{\mathrm{d}G}\cos W_m - \frac{\mathrm{d}\Delta H}{\mathrm{d}G}\cos W_s + \Delta h \sin W_m \sin 1''\frac{\mathrm{d}W_m}{\mathrm{d}G} + \Delta H \sin W_s \sin 1''\frac{\mathrm{d}W_s}{\mathrm{d}G} \ .$$

Ganz analog findet man

$$\frac{\mathrm{d}u^0}{\mathrm{d}\alpha_z} = -\frac{\mathrm{d}\Delta h}{\mathrm{d}\alpha_z}\cos W_m - \frac{\mathrm{d}\Delta H}{\mathrm{d}\alpha_z}\cos W_s + \Delta h \sin W_m \sin 1'' \frac{\mathrm{d}W_m}{\mathrm{d}\alpha_z} + \Delta H \sin W_s \sin 1'' \frac{\mathrm{d}W_s}{\mathrm{d}\alpha_z}$$

und schließlich $$\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}\delta_z} = -\frac{\mathrm{d}\Delta h}{\mathrm{d}\delta_z}\cos W_m - \frac{\mathrm{d}\Delta H}{\mathrm{d}\delta_z}\cos W_s + \Delta h \sin W_m \sin 1'' \frac{\mathrm{d}W_m}{\mathrm{d}\delta_z} + \Delta H \sin W_s \sin 1'' \frac{\mathrm{d}W_s}{\mathrm{d}\delta_z} .$$

Es sind also nunmehr folgende Differentialquotienten zu berechnen:

$$\frac{\mathrm{d}\Delta h}{\mathrm{d}G}, \frac{\mathrm{d}\Delta h}{\mathrm{d}\alpha_z}, \frac{\mathrm{d}\Delta h}{\mathrm{d}\delta_z}, \quad \frac{\mathrm{d}\Delta H}{\mathrm{d}G}, \frac{\mathrm{d}\Delta H}{\mathrm{d}\alpha_z}, \frac{\mathrm{d}\Delta H}{\mathrm{d}\delta_z}, \quad \frac{\mathrm{d}W_m}{\mathrm{d}G}, \frac{\mathrm{d}W_m}{\mathrm{d}\alpha_z}, \frac{\mathrm{d}W_m}{\mathrm{d}\delta_z}, \quad \frac{\mathrm{d}W_s}{\mathrm{d}G}, \frac{\mathrm{d}W_s}{\mathrm{d}\alpha_z}, \frac{\mathrm{d}W_s}{\mathrm{d}\delta_z} .$$

Es sind also die Formeln zu differenzieren, aus denen $\Delta h$, $\Delta H$, $W_m$ und $W_s$ berechnet worden war.

$$\Delta h = \Delta h_{\Pi} - \Delta h_R \cdots = -\varrho_0 \Pi_m{}^0 \cos h_\varrho - 28''.39 \left(\frac{\varrho_0 \Pi_m{}^0}{3422}\right)^2 \sin 2h_\varrho + k_R \operatorname{cotg}(h_0 + \Delta h_\varrho) \cdots$$

$$\Delta H = K_R \operatorname{cotg} H_0 \cdots$$

$$\mathrm{d}\Delta h = +\varrho_0 \Pi_m{}^0 \sin h_\varrho \sin 1'' \,\mathrm{d}h_\varrho - 56''.78 \left(\frac{\varrho_0 \Pi_m{}^0}{3422}\right)^2 \cos 2h_\varrho \sin 1'' \,\mathrm{d}h_\varrho - \varrho^0 \cos h_\varrho \,\mathrm{d}\Pi_m \sin 1''$$
$$- \Pi_m{}^0 \cos h_\varrho \,\mathrm{d}\varrho + \operatorname{cotg}(h_0 + \Delta h_\varrho) \frac{\mathrm{d}k_R}{\mathrm{d}(h + \Delta h_\varrho)} \mathrm{d}(h + \Delta h_\varrho) - \frac{k_R \sin 1''}{\sin^2(h + \Delta h_\varrho)} \mathrm{d}(h + \Delta h_\varrho) .$$

Hierbei sind für die sehr kleinen Korrektionen $\mathrm{d}\varrho$ und $\mathrm{d}\Pi_m$ nur die Hauptglieder der Koeffizienten eingesetzt. Für $\mathrm{d}h_\Pi$ findet man durch Differentiation der Gleichung

$$h_\varrho = h + (\delta_z - \delta_\varrho)\cos a$$

folgenden Wert:
$$\mathrm{d}h_\varrho = \mathrm{d}h + \cos a \,\mathrm{d}(\delta_z - \delta_\varrho) .$$

Ferner ist
$$\mathrm{d}\Delta h_\Pi = \varrho \Pi_m \sin h_\varrho \,\mathrm{d}h_\varrho$$

oder genügend genau
$$\mathrm{d}\Delta h_\Pi = \varrho \Pi_m \sin h_\varrho \,\mathrm{d}h .$$

Um den Ausdruck für $\mathrm{d}\Delta h$ in eine übersichtliche Form zu bringen, setze ich

$$\varrho \Pi_m \sin h_\varrho \sin 1'' - 56''.78 \left(\frac{\varrho \Pi_m}{3422}\right)^2 \cos 2h_\varrho \sin 1'' = w_1$$

$$\operatorname{cotg}(h + \Delta h_\varrho) \frac{\mathrm{d}k_R}{\mathrm{d}(h + \Delta h_\varrho)} - \frac{k_R \sin 1''}{\sin^2(h + \Delta h_\varrho)} = w_2 .$$

Dann erhält man $$\mathrm{d}\Delta h = w_1 \,\mathrm{d}h_\varrho + w_2 \,\mathrm{d}(h + \Delta h_\varrho) - \varrho \cos h_\varrho \sin 1'' \,\mathrm{d}\Pi_m - \Pi_m \cos h_\varrho \,\mathrm{d}\varrho$$

und daraus nach Einsetzung der oben abgeleiteten Werte für $\mathrm{d}h_\varrho$ und $\mathrm{d}\Delta h_\varrho$

$$\mathrm{d}\Delta h = w_1 \,\mathrm{d}h + w_1 \cos a \,\mathrm{d}(\delta_z - \delta_\varrho) + w_2 \,\mathrm{d}h + w_2 \varrho \Pi_m \sin 1'' \sin h_\varrho \,\mathrm{d}h - \varrho \cos h_\varrho \,\mathrm{d}\Pi_m \sin 1'' - \Pi_m \cos h_\varrho \,\mathrm{d}\varrho .$$

Setzt man noch $\varrho \Pi_m \sin 1'' \sin h_\varrho = \nu$, so wird

$$\mathrm{d}\Delta h = [w_1 + w_2(1 + \nu)] \,\mathrm{d}h + w_1 \cos a \,\mathrm{d}(\delta_z - \delta_\varrho) - \varrho \cos h_\varrho \,\mathrm{d}\Pi_m \sin 1'' - \Pi_m \cos h_\varrho \,\mathrm{d}\varrho .$$

Die in dieser Entwicklung begangenen Vernachlässigungen finden ihre Rechtfertigung durch eine einfache Diskussion der Größe der Koeffizienten.

Für $w_1$ und $w_2(1 + \nu)$ ist eine strengere Rechnung nötig, weil $\mathrm{d}h$ in manchen Fällen sehr groß sein kann. Um diese ganz zu umgehen, sind Tafeln für $w_1$ und $w_2(1 + \nu)$ gegeben, die selbst für extreme Fälle genügend genaue Werte geben. Man hat aus Tafel IX$^a$ $w_1$ mit den Argumenten $h_\varrho$ und $\varrho \Pi_m$ zu entnehmen und $w_2(1 + \nu)$ aus Tafel IX$^b$ mit dem einfachen Argument $h^0 + \Delta h_\varrho$. Hierbei ist eine unwesentliche Vernachlässigung insofern begangen worden, als $w_2$ eine Funktion von $h^0 + \Delta h_\varrho$, $\nu$ aber von $h_\varrho$ abhängig ist und außerdem den nicht konstanten Faktor $\varrho \Pi_m$ enthält. Jedoch hat eine numerische Untersuchung gezeigt, daß diese Vernachlässigungen so gering sind, daß man die weit größere Bequemlichkeit unbedingt der völligen Strenge der Rechnung vorziehen kann. Die Differentiation von $\Delta H$ ergibt

$$\mathrm{d}\Delta H = \left(\operatorname{cotg} H \frac{\mathrm{d}K_R}{\mathrm{d}H} - \frac{K_R \sin 1''}{\sin^2 H}\right) \mathrm{d}H$$

wo der Koeffizient $W$ von $\mathrm{d}H$ ebenfalls aus Tafel IX$^a$ mit dem Argument $H$ zu entnehmen ist.

Für $d\varrho$ wird man, weil man nur mit $\log \varrho$ rechnet, schreiben

$$d\varrho = \varrho \frac{d\log \varrho}{\log e} \quad \text{oder genügend genau} \quad d\varrho = d\log \varrho \times 2.3 .$$

Zur Berechnung der Differentiale $dW_m$ und $dW_s$ bedient man sich zweckmäßig folgender Formeln:

$$\operatorname{cotg} W_m \, dW_m = (da - dA) \operatorname{cotg} (a - A) - dH \operatorname{tg} H - d\Delta \operatorname{cotg} \Delta$$
$$\operatorname{cotg} W_s \, dW_s = (da - dA) \operatorname{cotg} (a - A) - dh \operatorname{tg} h - d\Delta \operatorname{cotg} \Delta .$$

Aus den Differentialformeln der sphärischen Trigonometrie erhält man schließlich die Differentialquotienten nach den Grundlagen der Rechnung, nämlich, wenn $p_m$ und $p_s$ die parallaktischen Winkel am Monde und am Stern bedeuten, die man sich aus den bekannten Formeln leicht verschaffen kann:

$$\frac{dh}{d\delta_z} = -\cos a , \quad \frac{dH}{d\delta_z} = -\cos A , \quad \frac{dh}{d\alpha_z} = -\cos \delta_m \sin p_m , \quad \frac{dH}{d\alpha_z} = -\cos \delta_s \sin p_s ,$$

$$\frac{da}{d\delta_z} = -\operatorname{tg} h \sin a , \quad \frac{dA}{d\delta_z} = -\operatorname{tg} H \sin A , \quad \frac{da}{d\alpha_z} = +\frac{\cos \delta_m \cos p_m}{\cos h} , \quad \frac{dA}{d\alpha_z} = +\frac{\cos \delta_s \cos p_s}{\cos H} ,$$

$$\frac{dh}{d\delta_m} = +\cos p_m , \quad \frac{dH}{d\delta_s} = +\cos p_s \quad \frac{dh}{d\alpha_m} = +\cos \delta_m \sin p_m , \quad \frac{dH}{d\alpha_s} = +\cos \delta_s \sin p_s ,$$

$$\frac{da}{d\delta_m} = +\frac{\sin p_m}{\cos h} , \quad \frac{dA}{d\delta_s} = +\frac{\sin p_s}{\cos H} , \quad \frac{da}{d\alpha_m} = -\frac{\cos \delta_m \cos p_m}{\cos h} , \quad \frac{dA}{d\alpha_s} = -\frac{\cos \delta_s \cos p_s}{\cos h} ,$$

$$\frac{d\Delta}{d\delta_m} = -\cos (W_m + p_m) , \quad \frac{d\Delta}{d\delta_s} = -\cos (W_s + p_s) , \quad \frac{d\Delta}{d\alpha_m} = \cos \delta_s \sin (W_s + p_s) , \quad \frac{d\Delta}{d\alpha_s} = \cos \delta_m \sin (W_m + p_m) .$$

Alle diese Beziehungen sind jetzt in die Gleichung $du_0$ einzuführen.

$$\begin{aligned} du^0 = {} & -\cos W_m [w_1 + w_2 (1 + \nu)] \, dh - w_1 \cos W_m \cos a \, d(\delta_z - \delta_\varrho) + \varrho \cos h_\varrho \cos W_m \, d\Pi_m \sin 1'' \\ & + \cos W_m \cos h_\varrho \, \Pi_m \, d\varrho + \Delta h \sin W_m \sin 1'' \operatorname{tg} W_m [(da - dA) \operatorname{cotg} (a - A) - dH \operatorname{tg} H - d\Delta \operatorname{cotg} \Delta] \\ & + \cos W_s \mathfrak{W} \, dH + \Delta H \sin W_s \sin 1'' \operatorname{tg} W_s [(da - dA) \operatorname{cotg} (a - A) - dh \operatorname{tg} h - d\Delta \operatorname{cotg} \Delta] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{du^0}{d\delta_z} = {} & \cos W_m \cos a [w_1 + w_2 (1 + \nu)] + \cos W_s \cos A \, \mathfrak{W} - w_1 \cos W_m \cos a \frac{d(\delta_z - \delta_\varrho)}{d\delta_z} + \cos W_m \cos h_\varrho \, \Pi_m \frac{d\varrho}{d\delta_z} \\ & + \Delta h \sin W_m \sin 1'' \operatorname{tg} W_m [(\operatorname{tg} H \sin A - \operatorname{tg} h \sin a) \operatorname{cotg} (a - A) + \cos A \operatorname{tg} H] \\ & + \Delta H \sin W_s \sin 1'' \operatorname{tg} W_s [(\operatorname{tg} H \sin A - \operatorname{tg} h \sin a) \operatorname{cotg} (a - A) + \cos a \operatorname{tg} h] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{du^0}{d\alpha_z} = {} & + \cos W_m \cos \delta_m \sin p_m [w_1 + w_2 (1 + \nu)] + \cos W_s \cos \delta_s \sin p_s \, \mathfrak{W} \\ & + \Delta h \sin W_m \sin 1'' \operatorname{tg} W_m \left[ \left( \frac{\cos \delta_m \cos p_m}{\cos h} - \frac{\cos \delta_s \cos p_s}{\cos H} \right) \operatorname{cotg} (a - A) + \cos \delta_s \sin p_s \operatorname{tg} H \right] \\ & + \Delta H \sin W_s \sin 1'' \operatorname{tg} W_s \left[ \left( \frac{\cos \delta_m \cos p_m}{\cos h} - \frac{\cos \delta_s \cos p_s}{\cos H} \right) \operatorname{cotg} (a - A) + \cos \delta_m \sin p_m \operatorname{tg} h \right] . \end{aligned}$$

Diese Gleichung läßt sich der oben entwickelten für $\frac{du^0}{d\delta_z}$ sehr ähnlich gestalten durch Einführung folgender Beziehungen:

$$\cos \delta_m \cos p_m = \sin \delta_z \cos h + \cos \delta_z \sin h \cos a$$
$$\cos \delta_s \cos p_s = \sin \delta_z \cos H + \cos \delta_z \sin H \cos A$$

$$\frac{\cos \delta_m \cos p_m}{\cos h} - \frac{\cos \delta_s \cos p_s}{\cos H} = \cos \delta_z (\operatorname{tg} h \cos a - \operatorname{tg} H \cos A)$$

$$\cos \delta_m \sin p_m = \cos \delta_z \sin a$$
$$\cos \delta_s \sin p_s = \cos \delta_z \sin A .$$

Dann erhält man für $\frac{du^0}{d\alpha_z}$ und $\frac{du^0}{d\delta_z}$ folgende sehr ähnliche Ausdrücke:

$$\frac{du^0}{d\alpha_z} = \cos\delta_z\,[\cos W_m \sin a\,[w_1 + w_2\,(1+\nu)] + \cos W_s \sin A\,\mathfrak{W}$$
$$+ \Delta h \sin W_m \operatorname{tg} W_m \sin 1''\,[(\operatorname{tg} h\cos a - \operatorname{tg} H\cos A)\operatorname{cotg}(a-A) + \sin A \operatorname{tg} H]$$
$$+ \Delta H \sin W_s \operatorname{tg} W_s \sin 1''\,[(\operatorname{tg} h\cos a - \operatorname{tg} H\cos A)\operatorname{cotg}(a-A) + \sin a \operatorname{tg} h]]$$

$$\frac{du^0}{d\delta_z} = \cos W_m \cos a\,[w_1 + w_2\,(1+\nu)] + \cos W_s \cos A\,\mathfrak{W}$$
$$+ \Delta h \sin W_m \operatorname{tg} W_m \sin 1''\,[-(\operatorname{tg} h\sin a - \operatorname{tg} H\sin A)\operatorname{cotg}(a-A) + \cos A \operatorname{tg} H]$$
$$+ \Delta H \sin W_s \operatorname{tg} W_s \sin 1''\,[-(\operatorname{tg} h\sin a - \operatorname{tg} H\sin A)\operatorname{cotg}(a-A) + \cos a \operatorname{tg} h]$$
$$- w_1 \cos W_m \cos a \frac{d(\delta_z - \delta_\rho)}{d\delta_z} + \cos W_m \cos h_\rho\, \Pi_m \frac{d\varrho}{d\delta_z}\,.$$

Bei der Differentiation von $u^0$ nach $G$ ist zu beachten, daß $h$, $H$, $a$, $A$ und $\Delta$ insofern von $G$ abhängen, als sie Funktionen von $\alpha_m$, $\alpha_s$, $\delta_m$, $\delta_s$ und $\Pi_m$ sind. Die Differentialquotienten $\frac{d\alpha_s}{dG}$ und $\frac{d\delta_s}{dG}$ werden im allgemeinen sehr klein sein, und es sollen daher die mit ihnen multiplizierten Glieder fortgelassen werden. Man erhält dann

$$\frac{du^0}{dG} = -\cos W_m\,[w_1 + w_2\,(1+\nu)]\left(\cos\delta_m \sin p_m \frac{d\alpha_m}{dG} + \cos p_m \frac{d\delta_m}{dG}\right) + \varrho \cos h_\rho \cos W_m \frac{d\Pi_m}{dG}\sin 1''$$
$$+ \Delta h \sin W_m \sin 1'' \operatorname{tg} W_m \left[\left(-\frac{\cos\delta_m \cos p_m}{\cos h}\frac{d\alpha_m}{dG} + \frac{\sin p_m}{\cos h}\frac{d\delta_m}{dG}\right)\operatorname{cotg}(a-A) - \operatorname{cotg}\Delta\frac{d\Delta}{dG}\right]$$
$$+ \Delta H \sin W_s \sin 1'' \operatorname{tg} W_s \left[\left(-\frac{\cos\delta_m \cos p_m}{\cos h}\frac{d\alpha_m}{dG} + \frac{\sin p_m}{\cos h}\frac{d\delta_m}{dG}\right)\operatorname{cotg}(a-A) - \operatorname{cotg}\Delta\frac{d\Delta}{dG}\right].$$

Diese Gleichungen schreibt man übersichtlicher, wenn man setzt:

$$\Delta h \sin W_m \sin 1'' \operatorname{tg} W_m = \sigma$$
$$\Delta H \sin W_s \sin 1'' \operatorname{tg} W_s = \Sigma\,.$$

Dann erhält man folgende Endwerte:

$$\frac{du^0}{d\delta_z} = \cos W_m \cos a\,[w_1 + w_2\,(1+\nu)] + \cos W_s \cos A\,\mathfrak{W} + \sigma\cos A\operatorname{tg} H$$
$$- (\operatorname{tg} h\sin a - \operatorname{tg} H\sin A)\operatorname{cotg}(a-A)(\sigma+\Sigma) + \Sigma\cos a\operatorname{tg} h$$
$$- w_1 \cos W_m \cos a\frac{d(\delta_z-\delta_\rho)}{d\delta_z} + \cos W_m \cos h_\rho\,\Pi_m\frac{d\varrho}{d\delta_z}$$

$$\frac{1}{\cos\delta_z}\frac{du^0}{d\alpha_z} = \cos W_m \sin a\,[w_1 + w_2\,(1+\nu)] + \cos W_s \sin A\,\mathfrak{W} + \sigma\sin A\operatorname{tg} H$$
$$+ (\operatorname{tg} h\cos a - \operatorname{tg} H\cos A)\operatorname{cotg}(a-A)(\sigma+\Sigma) + \Sigma\sin a\operatorname{tg} h\,.$$

$$\frac{du^0}{dG} = -\cos W_m\,[w_1 + w_2\,(1+\nu)]\left(\cos\delta_m\sin p_m\frac{d\alpha_m}{dG} + \cos p_m\frac{d\delta_m}{dG}\right) + \varrho\cos h_\rho\cos W_m\frac{d\Pi_m}{dG}\sin 1''$$
$$+ (\sigma+\Sigma)\left[\left(-\cos\delta_m\cos p_m\frac{d\alpha_m}{dG} + \sin p_m\frac{d\delta_m}{dG}\right)\frac{\operatorname{cotg}(a-A)}{\cos h} - \operatorname{cotg}\Delta\frac{d\Delta}{dG}\right].$$

Es bleiben nunmehr noch, um ganz streng zu verfahren, die Faktoren der letzten Korrektionen der Koordinaten des Mondes und des anderen Gestirns zu berechnen, also

$$\frac{d\Delta^{0''}}{d\alpha_m},\ \frac{d\Delta^{0''}}{d\delta_m},\ \frac{d\Delta^{0''}}{d\alpha_s},\ \frac{d\Delta^{0''}}{d\delta_s}\,.$$

Da die Korrektionen bei der Sicherheit der heutigen Positionen der Gestirne nur klein sein werden, kann man diese Differentialquotienten ersetzen durch

$$\frac{d\Delta^0}{d\alpha_m},\ \frac{d\Delta^0}{d\delta_m},\ \frac{d\Delta^0}{d\alpha_s},\ \frac{d\Delta^0}{d\delta_s}$$

also den Einfluß auf $u^0$ als verschwindend betrachten.

Durch Differentiation der Formel

$$\cos\Delta^0 = \sin\delta_m{}^0\sin\delta_s{}^0 + \cos\delta_m{}^0\cos\delta_s{}^0\cos(\alpha_m{}^0 - \alpha_s{}^0)$$

erhält man $\frac{d\Delta^0}{d\alpha_m} = \cos\delta_s\sin(W_s + p_s)$, $\frac{d\Delta^0}{d\delta_m} = -\cos(W_m + p_m)$, $\frac{d\Delta^0}{d\alpha_s} = -\frac{d\Delta^0}{d\alpha_m}$, $\frac{d\Delta^0}{d\delta_s} = -\cos(W_s + p_s)$.

Nunmehr trägt man alle Differentialquotienten in die Endgleichung ein und erhält:

$$\text{Beob.} - \text{Rechn.} = -\mathrm{d}\lambda\left(\frac{\mathrm{d}\Delta^0}{\mathrm{d}G}+\frac{\mathrm{d}u^0}{\mathrm{d}G}+\varepsilon\frac{\mathrm{d}u^0}{\mathrm{d}\alpha_z}\right)+\mathrm{d}T\left(\frac{\mathrm{d}\Delta^0}{\mathrm{d}G}+\frac{\mathrm{d}u^0}{\mathrm{d}G}+(1+\varepsilon)\frac{\mathrm{d}u^0}{\mathrm{d}\alpha_z}\right)$$
$$+y\frac{\mathrm{d}u^0}{\mathrm{d}\delta_z}+\varrho\cos h_\rho\cos W_m\,\mathrm{d}\Pi_m+\cos W_m\cos h_\rho\,\Pi_m\,\mathrm{d}\varrho$$
$$-w_1\cos W_m\cos a\,\mathrm{d}(\delta_z-\delta_\rho)+\frac{\mathrm{d}\Delta^0}{\mathrm{d}\alpha_m}\mathrm{d}\alpha_m+\frac{\mathrm{d}\Delta^0}{\mathrm{d}\delta_m}\mathrm{d}\delta_m+\frac{\mathrm{d}\Delta^0}{\mathrm{d}\alpha_s}\mathrm{d}\alpha_s+\frac{\mathrm{d}\Delta^0}{\mathrm{d}\delta_s}\mathrm{d}\delta_s\ .$$

**Rechnungsbeispiel.**

1894 Aug. 3. Distanz Antares — Mond (äußerer Rand).

Beobachtet $\Delta'' = 90^\circ\,22'\,15''.9$ .

Beobachtungszeit nach Chronometer $U^0 = 0^h\,1^m50^s$ $\quad \delta_z{}^0 = +21^\circ\,5'$

Aus Gangtabelle $\Delta U_g{}^0 = +\ 15$

Genäherte Greenwicher Zeit $G^0 = 0^h\,2^m\,5^s$

Aus Zeitbestimmung $\Delta U^0 = +7\ 40\ 15$ (Sonnenhöhe)

Mithin genäherte Länge $\lambda^0 = +7^h40^m0^s = \Delta U^0 - \Delta U_g{}^0$ .

Für 1894 Aug. 3 $0^h2^m5^s$ interpoliert man aus dem Nautical Almanac

| | | |
|---|---|---|
| $\Delta^0 = 89^\circ\,30'\,24''.32$ | $\alpha_m{}^0 = 10^h45^m18^s.66$ | $\alpha_s = 16^h22^m57^s.086$ |
| $\odot_\alpha{}^0 = 8^h48^m12^s.84$ | $\delta_m{}^0 = +10^\circ\,6'\,3''.36$ | $\delta_s = -26^\circ\,12'\,3''.40$ . Außerdem hat man |
| $\delta_z{}^0 - \delta_\rho{}^0 = 462''.49$ | $\Pi_m{}^0 = 3618''.037$ | $\beta = 762.0$ mm |
| $\log\varrho^0 = 9.9998135$ | $r_m{}^0 = 16'\,27''.58$ | $\vartheta = +18^\circ.5$ Cels. $= \vartheta_B$ |

Ferner die Differentialquotienten für $\mathrm{d}G = 1^m$

| | | |
|---|---|---|
| $\frac{\mathrm{d}\Delta^0}{\mathrm{d}G} = -36''.8055$ | $\frac{\mathrm{d}\odot_\alpha{}^0}{\mathrm{d}G} = \varepsilon = \frac{1}{365}$ | $\frac{\mathrm{d}\Pi_m}{\mathrm{d}G} = -0''.03021$ |
| $\frac{\mathrm{d}\alpha_m{}^0}{\mathrm{d}G} = +2^s.2228$ | $\frac{\mathrm{d}\delta_m{}^0}{\mathrm{d}G} = -16''.627$ | $\frac{\mathrm{d}r_m{}^0}{\mathrm{d}G} = 0$ . |

Die Ortszeit $T_0 = G^0 + \lambda^0$ ergab sich zu $7^h\,42^m5^s$, also $\alpha_z{}^0 = T^0 + \odot_\alpha{}^0 = 16^h30^m17^s.84$

$$\tau_m{}^0 = \alpha_z{}^0 - \alpha_m{}^0 = 5^h44^m59^s.18 = 86^\circ\,14'\,47''.70 \qquad \tau_s{}^0 = \alpha_z{}^0 - \alpha_s{}^0 = 0^h7^m20^s.75 = 1^\circ\,50'\,11''.31\ .$$

Mit diesen Werten erhält man aus den oben gegebenen Formeln:

| | | |
|---|---|---|
| $h^0 = 7^\circ\,4'\,41''.37$ | $H^0 = 42^\circ\,40'\,55''.92$ | $W_m = 46^\circ\,59'\,33''.07$ |
| $a^0 = 98\ 8\ 12.54$ | $A^0 = 2\ 14\ 30.06$ | $W_s = 80\ 48\ 40.21$ . |

Damit ist die Vorrechnung erledigt.

Von der Berechnung der Distanzformel sollen nur kurz die Hauptdaten angegeben werden.

Man erhält als erste Näherung von $\Delta h_\rho$ folgenden Wert

$$\Delta h_{\rho_1} = -3596''.80\ .$$

Setzt man diesen Wert in die strenge Formel ein, so ergibt sich

$$\Delta h_\rho = -59'\,56''.357\ .$$

Eine Prüfung durch die Reihenentwicklung ergibt

$$\Delta h_\rho = -59'\,56''.361\,,\quad \Delta h_{\Pi} = -59'\,56''.349\ .$$

Die Refraktion gibt $-\Delta h_R = +7'\,56''.974$, $\Delta h_\lambda = -0''.036$, also

$$\Delta h = \Delta h_{\Pi} - \Delta h_R + \Delta h_\lambda = -51'\,59''.411\ .$$

Ebenso erhält man

$$\Delta H = +1'\,1''.186\ .$$

Die drei Näherungsstufen der Distanzformel führen zu folgendem Resultat:

| | | |
|---|---|---|
| $u_1 =$ | $+35'\,17''.958$ | 1. Näherung |
| $u_2 - u_1 =$ | $+6.353$ | 2. » |
| $u_3 - u_2 =$ | $-0.045$ | 3. » |
| $u^0 =$ | $+35'\,24''.266$ | |
| $\Delta^0 =$ | $89^\circ\,30'\,24''.320$ | |
| $\Delta'^0_{\text{Ber.}} =$ | $90^\circ\ 5'\,48''.586$ . | |

Hierzu kommt

| | |
|---|---|
| $+r_m =$ | $+16\ 27.58$ |
| $+(\Delta r)_\rho =$ | $+1.983$ |
| $+(\Delta r)_R =$ | $-8.693$ |
| $\Delta''^0_{\text{Ber.}} =$ | $90^\circ\,22'\ 9''.456$ . |

Wogegen beobachtet $\Delta'' = 90^\circ\,22'\,15''.9$ .

$\Delta''_{\text{Beob.}} - \Delta''^{0}_{\text{Ber.}} = +6''.444$ ist also eine Funktion der in Frage stehenden Verbesserungen der bei der Rechnung benutzten Näherungswerte.

Die Differentialquotienten werden folgende Zahlenwerte haben:

$\frac{du^0}{d\delta_z} = -0''.00961$ pro Bogensekunde $\quad \frac{du^0}{d\alpha_z} = -0''.16680$ pro Zeitsekunde $\quad \frac{du^0}{dG} = +0''.21976$ pro Zeitminute.

Die übrigen Differentialquotienten sind nur für ganz strenge Rechnungen nötig, wie man aus den folgenden Gleichungen sieht. Man erhält nämlich folgende Endgleichung:

$$\begin{aligned} +6''.444 = & -d\lambda^m\,[-36''.8055 + 0''.21976 + 0.164\cdot(-0''.16680)] \\ & + dT^m[-36.8055 + 0.21976 + 60.164\cdot(-0.16680)] \\ & + y''(-0.00961) + d\Pi_m''\cdot 0.678 + 0.00006\, d\log\varrho^{\text{VII. Dez.}} \\ & + 0.0000\, d(\delta_z - \delta_\rho)'' + 0.00009\, d\alpha_m{}^s - 0.00009\, d\alpha^s \\ & + 0.00001\, d\delta_m'' - 0.00000\, d\delta_s'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} +6''.444 = & +36''.613\, d\lambda^m - 46''.621\, dT^m - 0.00961\, y'' \\ & + 0.678\, d\Pi_m'' + 0.00006\, d\log\varrho^{\text{VII. Dez.}} \\ & + 0.0001\, d\alpha_m{}^s - 0.0001\, d\alpha_s{}^s \\ & + 0.00001\, d\delta_m'' - 0.00000\, d\delta_s'' \\ & + 0.0000\, d(\delta_z - \delta_\rho)''. \end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung läßt sich, wenn anderweitig die Korrektion der Ortszeit $dT_m$ und die der Polhöhe bekannt ist, sofort die Korrektion der genähert bekannten Länge $d\lambda$ ableiten. Sind mehrere Monddistanzen gemessen, so hat man für die Ermittelung aller Unbekannten die Methode der kleinsten Quadrate anzuwenden.

In unserem Falle würde sich ergeben, wenn man außer $d\lambda$ alle Korrektionen gleich null setzt, also die Näherungswerte für strenge annimmt

$$d\lambda = +10^s.56$$

also wäre die genäherte Länge um $+10^s.56$ zu verbessern, d. h. die Länge des Beobachtungsortes ist

$$\lambda = 7^h\,40^m\,10^s.56\,.$$

Es wurde zur Kontrolle der Differentiation ein zweites Beispiel durchgerechnet mit folgenden Näherungswerten:

$\delta_z{}^0 = +21°\,6'\,30''$ $\quad T^0 = 7^h\,42^m\,0^s$ $\quad \lambda^0 = 7^h\,39^m\,45^s$

also im Sinne Beispiel 2) − 1)

$d\delta_z = +90''$ $\quad dT = -5^s$ $\quad d\lambda = -15^s$.

Dann ergab sich

| | |
|---|---|
| $u_1 =$ | $+35'\,17''.979$ |
| $u_2 - u_1 =$ | $+6.361$ |
| $u_3 - u_2 =$ | $-0.045$ |
| $u^0 =$ | $+35'\,24''.295$ |
| $\Delta^0 =$ | $89°\,30'\,18''.186$ |
| $\Delta'^0 =$ | $90°\;5'\,42''.481$ |
| $\Delta''^0_{\text{Rech.}} =$ | $90°\,22'\;3''.351$ |

also $\quad \Delta''^0_{2)} - \Delta''^0_{1)} = -6''.105$.

Ferner bei Einsetzung von $d\delta_z$, $dT$ und $d\lambda$ in die Endgleichung $-6''.113$, also in befriedigender Übereinstimmung.

## Tafeln.

### Tafel I zur Berechnung der Mondparallaxe.

$$A = 28''.39 \left(\frac{\varrho\, \Pi_m}{3422}\right)^2 \qquad B = 0''.314 \left(\frac{\varrho\, \Pi_m}{3422}\right)^3.$$

| $(\varrho\, \Pi_m)''$ | log $A$ | | log $B$ | | $(\varrho\, \Pi_m)''$ | log $A$ | | log $B$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3200 | 1.3948 | 28 | 9.4095 | 40 | 3450 | 1.4602 | 25 | 9.5075 | 37 |
| 10 | 3976 | 27 | 4135 | 41 | 60 | 4627 | 25 | 5112 | 38 |
| 20 | 4003 | 27 | 4176 | 40 | 70 | 4652 | 25 | 5150 | 37 |
| 30 | 4030 | 26 | 4216 | 41 | 80 | 4677 | 25 | 5187 | 38 |
| 40 | 4056 | 27 | 4257 | 40 | 90 | 4702 | 25 | 5225 | 37 |
| 50 | 1.4083 | 27 | 9.4297 | 39 | 3500 | 1.4727 | 25 | 9.5262 | 37 |
| 60 | 4110 | 26 | 4336 | 40 | 10 | 4752 | 24 | 5299 | 37 |
| 70 | 4136 | 27 | 4376 | 40 | 20 | 4776 | 25 | 5336 | 37 |
| 80 | 4163 | 26 | 4416 | 40 | 30 | 4801 | 25 | 5373 | 37 |
| 90 | 4189 | 27 | 4456 | 39 | 40 | 4826 | 24 | 5410 | 37 |
| 3300 | 1.4216 | 26 | 9.4495 | 40 | 50 | 1.4850 | 24 | 9.5447 | 36 |
| 10 | 4242 | 26 | 4535 | 39 | 60 | 4874 | 25 | 5483 | 37 |
| 20 | 4268 | 26 | 4574 | 39 | 70 | 4899 | 24 | 5520 | 36 |
| 30 | 4294 | 26 | 4613 | 39 | 80 | 4923 | 24 | 5556 | 37 |
| 40 | 4320 | 26 | 4652 | 39 | 90 | 4947 | 25 | 5593 | 36 |
| 50 | 1.4346 | 26 | 9.4691 | 39 | 3600 | 1.4972 | 24 | 9.5629 | 36 |
| 60 | 4372 | 26 | 4730 | 39 | 10 | 4996 | 24 | 5665 | 36 |
| 70 | 4398 | 26 | 4769 | 39 | 20 | 5020 | 24 | 5701 | 36 |
| 80 | 4424 | 25 | 4808 | 38 | 30 | 5044 | 23 | 5737 | 36 |
| 90 | 4449 | 26 | 4846 | 38 | 40 | 5067 | 24 | 5773 | 36 |
| 3400 | 1.4475 | 26 | 9.4884 | 39 | 50 | 1.5091 | 24 | 9.5809 | 35 |
| 10 | 4501 | 25 | 4923 | 38 | 60 | 5115 | 24 | 5844 | 36 |
| 20 | 4526 | 25 | 4961 | 38 | 70 | 5139 | 23 | 5880 | 35 |
| 30 | 4551 | 26 | 4999 | 38 | 80 | 5162 | 24 | 5915 | 36 |
| 40 | 4577 | 25 | 5037 | 38 | 90 | 5186 | 23 | 5951 | 35 |
| 3450 | 1.4602 | | 9.5075 | | 3700 | 1.5209 | | 9.5986 | |

### Tafel II zur Korrektion des log $\varrho$ wegen Refraktion und Mondparallaxe

| $h$ | log $(1 + x)$ | $h$ | log $(1 + x)$ | $h$ | log $(1 + x)$ | $h$ | log $(1 + x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5° | 0.0000147 | 10° | 0.0000046 | 20° | 0.0000012 | 30° | 0.0000005 |
| 6 | 111 | 12 | 33 | 22 | 09 | 40 | 2 |
| 7 | 086 | 14 | 25 | 24 | 08 | 50 | 1 |
| 8 | 069 | 16 | 19 | 26 | 07 | 60 | 1 |
| 9 | 056 | 18 | 15 | 28 | 06 | 70 | 0 |
| 10° | 0.0000046 | 20° | 0.0000012 | 30° | 0.0000005 | 90° | 0.0000000 |

# Tafel III. Besselsche Refraktionstafel für die wahre Höhe.

## III[a].

| $h^0$ | $\alpha_1$ | | $A_1$ | $\lambda_1$ | $h^0$ | $\alpha_1$ | | $A_1$ | $\lambda_1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5° 0′ | 1.69902 | | 0.9870 | 1.0903 | 13° 0′ | 1.75005 | 28 | 0.9975 | 1.0197 |
| 10 | 70216 | 314 | 9876 | 0868 | 10 | 75033 | 27 | | 0192 |
| 20 | 70509 | 293 | 9882 | 0834 | 20 | 75060 | 27 | | 0188 |
| 30 | 70782 | 273 | 9888 | 0802 | 30 | 75087 | 25 | | 0184 |
| 40 | 71037 | 255 | 9893 | 0771 | 40 | 75112 | 24 | | 0180 |
| 50 | 71276 | 239 | 9897 | 0742 | 50 | 75136 | 23 | | 0177 |
| 6 0 | 1.71499 | 223 | 0.9901 | 1.0715 | 14 0 | 1.75159 | 23 | | 1.0173 |
| 10 | 71708 | 209 | 9905 | 0688 | 10 | 75182 | 22 | | 0170 |
| 20 | 71902 | 194 | 9909 | 0664 | 20 | 75204 | 21 | | 0167 |
| 30 | 72083 | 181 | 9913 | 0640 | 30 | 75225 | 20 | | 0164 |
| 40 | 72256 | 173 | 9917 | 0617 | 40 | 75245 | 20 | | 0161 |
| 50 | 72418 | 162 | 9920 | 0594 | 14 50 | 75265 | 19 | | 0158 |
| 7 0 | 1.72569 | 151 | 0.9924 | 1.0573 | 15° | 1.75284 | 106 | | 1.0155 |
| 10 | 72711 | 142 | 9926 | 0552 | 16 | 75390 | 88 | | 0138 |
| 20 | 72846 | 135 | 9929 | 0531 | 17 | 75478 | 74 | | 0123 |
| 30 | 72974 | 128 | 9931 | 0512 | 18 | 75552 | 63 | | 0110 |
| 40 | 73095 | 121 | 9934 | 0493 | 19 | 75615 | 55 | | 0099 |
| 50 | 73207 | 112 | 9936 | 0476 | 20 | 75670 | 47 | | 0088 |
| 8 0 | 1.73314 | 107 | 0.9938 | 1.0459 | 21 | 1.75717 | 40 | | 1.0079 |
| 10 | 73417 | 103 | 9940 | 0444 | 22 | 75757 | 36 | | 0071 |
| 20 | 73514 | 97 | 9942 | 0429 | 23 | 75793 | 31 | | 0064 |
| 30 | 73605 | 91 | 9944 | 0416 | 24 | 75824 | 28 | | 0058 |
| 40 | 73692 | 87 | 9946 | 0404 | 25 | 75852 | 25 | | 0052 |
| 50 | 73777 | 85 | 9948 | 0393 | 26 | 75877 | 22 | | 0048 |
| 9 0 | 1.73857 | 80 | 0.9949 | 1.0382 | 27 | 1.75899 | 20 | | 1.0044 |
| 10 | 73933 | 76 | 9951 | 0372 | 28 | 75919 | 18 | | 0041 |
| 20 | 74005 | 72 | 9952 | 0363 | 29 | 75937 | 16 | | 0038 |
| 30 | 74075 | 70 | 9954 | 0354 | 30 | 75953 | 14 | | 0035 |
| 40 | 74141 | 66 | 9955 | 0346 | 31 | 75967 | 14 | | 0032 |
| 50 | 74203 | 62 | 9957 | 0337 | 32 | 75981 | 12 | | 0030 |
| 10 0 | 1.74263 | 60 | 0.9958 | 1.0329 | 33 | 1.75993 | 11 | | 1.0028 |
| 10 | 74321 | 58 | 9960 | 0320 | 34 | 76004 | 10 | | 0026 |
| 20 | 74376 | 55 | 9961 | 0312 | 35 | 76014 | 10 | | 0024 |
| 30 | 74428 | 52 | 9962 | 0304 | 36 | 76024 | 8 | | 0021 |
| 40 | 74478 | 50 | 9963 | 0296 | 37 | 76032 | 8 | | 0019 |
| 50 | 74527 | 49 | 9964 | 0289 | 38 | 76040 | 7 | | 0018 |
| 11 0 | 1.74573 | 46 | 0.9965 | 1.0281 | 39 | 1.76047 | 6 | | 1.0017 |
| 10 | 74617 | 44 | 9966 | 0273 | 40 | 76053 | 6 | | 0016 |
| 20 | 74660 | 43 | 9967 | 0265 | 41 | 76059 | 6 | | 0015 |
| 30 | 74701 | 41 | 9967 | 0257 | 42 | 76065 | 5 | | 0015 |
| 40 | 74740 | 39 | 9968 | 0249 | 43 | 76070 | 5 | | 0014 |
| 50 | 74777 | 37 | 9969 | 0241 | 44 | 76075 | 5 | | 0013 |
| 12 0 | 1.74813 | 36 | 0.9970 | 1.0234 | 45 | 1.76080 | 19 | | 1.0013 |
| 10 | 74848 | 35 | 9970 | 0226 | 50 | 76099 | 13 | | |
| 20 | 74882 | 34 | 9971 | 0219 | 55 | 76112 | 10 | | |
| 30 | 74914 | 32 | 9972 | 0213 | 60 | 76122 | 13 | | |
| 40 | 74945 | 31 | 9973 | 0208 | 70 | 76135 | 6 | | |
| 50 | 74976 | 31 | 9974 | 0202 | 80 | 76141 | 2 | | |
| 13 0 | 1.75005 | 29 | 0.9975 | 1.0197 | 90 | 1.76143 | | | |

III[b]

| $b$ | log $B$ | $b$ | log $B$ |
|---|---|---|---|
| mm | | mm | |
| 730 | −0.01261 | 755 | +0.00201 |
| 31 | 1202 | 56 | 259 |
| 32 | 1142 | 57 | 316 |
| 33 | 1083 | 58 | 374 |
| 34 | 1024 | 59 | 431 |
| 35 | −0.00965 | 760 | +0.00488 |
| 36 | 906 | 61 | 545 |
| 37 | 847 | 62 | 602 |
| 38 | 788 | 63 | 659 |
| 39 | 729 | 64 | 716 |
| 740 | −0.00670 | 65 | +0.00773 |
| 41 | 612 | 66 | 830 |
| 42 | 553 | 67 | 886 |
| 43 | 494 | 68 | 943 |
| 44 | 436 | 69 | 999 |
| 45 | −0.00378 | 770 | +0.01056 |
| 46 | 319 | 71 | 1112 |
| 47 | 261 | 72 | 1168 |
| 48 | 203 | 73 | 1225 |
| 49 | 145 | 74 | 1281 |
| 750 | −0.00087 | 75 | +0.01337 |
| 51 | −0.00029 | 76 | 1393 |
| 52 | +0.00028 | 77 | 1449 |
| 53 | 86 | 78 | 1505 |
| 54 | +0.00144 | 79 | 1560 |
| 55 | 201 | 780 | +0.01616 |

III[c]

| $\vartheta$ Cels. | log $\gamma$ |
|---|---|
| −10° | +0.03060 |
| − 9 | 2896 |
| − 8 | 2733 |
| − 7 | 2570 |
| − 6 | 2408 |
| − 5 | +0.02247 |
| − 4 | 2086 |
| − 3 | 1926 |
| − 2 | 1766 |
| − 1 | 1607 |
| 0 | +0.01448 |
| + 1 | 1290 |
| + 2 | 1133 |
| + 3 | 0976 |
| + 4 | 0820 |
| + 5 | +0.00664 |
| + 6 | 509 |
| + 7 | 354 |
| + 8 | 200 |
| + 9 | +0.00047 |
| +10 | −0.00106 |
| +11 | 259 |
| +12 | 411 |
| +13 | 562 |
| +14 | 713 |
| +15 | 863 |

| $\vartheta$ Cels. | log $\gamma$ |
|---|---|
| +15° | −0.00863 |
| +16 | 1013 |
| +17 | 1162 |
| +18 | 1311 |
| +19 | 1459 |
| +20 | −0.01607 |
| +21 | 1754 |
| +22 | 1901 |
| +23 | 2047 |
| +24 | 2194 |
| +25 | −0.02338 |

III[d]

| $\vartheta_B$ Cels. | log $T$ |
|---|---|
| −10° | +0.00070 |
| − 5 | 35 |
| 0 | 0 |
| + 5 | −0.00035 |
| +10 | 70 |
| +15 | −0.00105 |
| +20 | 140 |
| +25 | 175 |

$\log\beta = \log B + \log T$

Veränderung von log $\gamma$ für zehntel Grade.

| Celsius | −10° | 0° | +10° | +20° |
|---|---|---|---|---|
| +0°1 | − 16 | − 16 | − 15 | − 15 |
| 2 | − 33 | − 32 | − 31 | − 29 |
| 3 | − 49 | − 47 | − 46 | − 44 |
| 4 | − 66 | − 63 | − 61 | − 59 |
| 5 | − 82 | − 79 | − 76 | − 74 |
| 6 | − 98 | − 95 | − 92 | − 88 |
| 7 | −115 | −111 | −107 | −103 |
| 8 | −131 | −126 | −122 | −118 |
| 9 | −148 | −142 | −138 | −132 |

In Einheiten der 5. Dezimale.

$\vartheta_B$ = Thermometerstand am Barometer.

III[e]. Korrektionen von $\log\gamma = (\lambda_1 - 1)\log\gamma$.

| $h$ | log γ 0.004 | 0.008 | 0.012 | 0.016 | 0.020 | 0.024 | 0.028 | 0.032 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5° | 36 | 72 | 108 | 144 | 181 | 217 | 253 | 289 |
| 6 | 29 | 57 | 86 | 115 | 144 | 172 | 200 | 229 |
| 7 | 23 | 46 | 68 | 92 | 115 | 138 | 160 | 183 |
| 8 | 18 | 37 | 55 | 73 | 92 | 112 | 129 | 147 |
| 9 | 15 | 31 | 46 | 61 | 76 | 92 | 107 | 122 |
| 10 | 13 | 26 | 39 | 53 | 66 | 79 | 92 | 105 |
| 11 | 11 | 22 | 34 | 45 | 56 | 67 | 79 | 90 |
| 12 | 9 | 19 | 28 | 37 | 47 | 56 | 66 | 75 |
| 13 | 8 | 16 | 24 | 32 | 39 | 47 | 55 | 63 |
| 14 | 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 48 | 55 |
| 15 | 6 | 12 | 19 | 25 | 31 | 37 | 43 | 50 |
| 16 | 6 | 11 | 17 | 22 | 28 | 34 | 39 | 45 |
| 17 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 34 | 39 |
| 18 | 4 | 9 | 13 | 18 | 22 | 26 | 31 | 35 |
| 19 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 |
| 20 | 4 | 7 | 11 | 14 | 18 | 21 | 25 | 28 |
| 22 | 3 | 6 | 9 | 11 | 14 | 17 | 20 | 23 |
| 24 | 2 | 5 | 7 | 9 | 12 | 14 | 16 | 19 |
| 26 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 13 | 15 |
| 28 | 2 | 3 | 5 | 7 | 8 | 10 | 11 | 13 |
| 30 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 | 8 | 10 | 11 |
| 40 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |

Die Korrektionen von log $\gamma$ und log $\beta$ sind an die absoluten Werte der Logarithmen anzubringen.

III[f]. Korrektion von $\log\beta = (A_1 - 1)\log\beta$.

| $h$ | log β 0.004 | 0.008 | 0.012 | 0.016 | 0.020 |
|---|---|---|---|---|---|
| 5° | − 5 | −10 | −16 | −21 | −26 |
| 6 | − 4 | − 8 | −13 | −16 | −20 |
| 7 | − 3 | − 6 | − 9 | −12 | −15 |
| 8 | − 2 | − 5 | − 7 | −10 | −12 |
| 9 | − 2 | − 4 | − 6 | − 8 | −10 |
| 10 | − 2 | − 3 | − 5 | − 7 | − 8 |
| 11 | − 1 | − 3 | − 5 | − 6 | − 7 |
| 12 | − 1 | − 2 | − 4 | − 5 | − 6 |
| 13 | − 1 | − 2 | − 2 | − 4 | − 5 |

Tafel IV. $\log C = \log [0''.106\,(1 + 3\,\mathrm{cotg}^2\,\Delta)]$. (Siehe pg. 14).

| $\Delta$ | log $C$ | Diff. | $\Delta$ | log $C$ | Diff. | $\Delta$ | log $C$ | Diff. | $\Delta$ | log $C$ | Diff. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20° | 0.398 | | 40° | 9.745 | | 60° | 9.325 | | 80° | 9.063 | |
| | | −44 | | | −25 | | | −17 | | | −7 |
| 21 | 0.354 | | 41 | 9.720 | | 61 | 9.308 | | 81 | 9.056 | |
| | | −42 | | | −24 | | | −17 | | | −7 |
| 22 | 0.312 | | 42 | 9.696 | | 62 | 9.291 | | 82 | 9.049 | |
| | | −41 | | | −23 | | | −17 | | | −6 |
| 23 | 0.271 | | 43 | 9.673 | | 63 | 9.274 | | 83 | 9.043 | |
| | | −39 | | | −24 | | | −16 | | | −5 |
| 24 | 0.232 | | 44 | 9.649 | | 64 | 9.258 | | 84 | 9.038 | |
| | | −38 | | | −23 | | | −16 | | | −4 |
| 25 | 0.194 | | 45 | 9.626 | | 65 | 9.242 | | 85 | 9.034 | |
| | | −36 | | | −22 | | | −15 | | | −3 |
| 26 | 0.158 | | 46 | 9.604 | | 66 | 9.227 | | 86 | 9.031 | |
| | | −35 | | | −22 | | | −15 | | | −3 |
| 27 | 0.123 | | 47 | 9.582 | | 67 | 9.212 | | 87 | 9.028 | |
| | | −34 | | | −22 | | | −15 | | | −2 |
| 28 | 0.089 | | 48 | 9.560 | | 68 | 9.197 | | 88 | 9.026 | |
| | | −33 | | | −22 | | | −14 | | | −1 |
| 29 | 0.056 | | 49 | 9.538 | | 69 | 9.183 | | 89 | 9.025 | |
| | | −32 | | | −21 | | | −13 | | | −1 |
| 30 | 0.024 | | 50 | 9.517 | | 70 | 9.170 | | 90 | 9.024 | |
| | | −31 | | | −20 | | | −13 | | | +1 |
| 31 | 9.993 | | 51 | 9.497 | | 71 | 9.157 | | 91 | 9.025 | |
| | | −30 | | | −21 | | | −13 | | | +1 |
| 32 | 9.963 | | 52 | 9.476 | | 72 | 9.144 | | 92 | 9.026 | |
| | | −29 | | | −20 | | | −12 | | | +2 |
| 33 | 9.934 | | 53 | 9.456 | | 73 | 9.132 | | 93 | 9.028 | |
| | | −29 | | | −19 | | | −12 | | | +3 |
| 34 | 9.905 | | 54 | 9.437 | | 74 | 9.120 | | 94 | 9.031 | |
| | | −28 | | | −20 | | | −11 | | | +3 |
| 35 | 9.877 | | 55 | 9.417 | | 75 | 9.109 | | 95 | 9.034 | |
| | | −28 | | | −19 | | | −10 | | | +4 |
| 36 | 9.849 | | 56 | 9.398 | | 76 | 9.099 | | 96 | 9.038 | |
| | | −27 | | | −19 | | | −10 | | | +5 |
| 37 | 9.822 | | 57 | 9.379 | | 77 | 9.089 | | 97 | 9.043 | |
| | | −26 | | | −18 | | | −9 | | | +6 |
| 38 | 9.796 | | 58 | 9.361 | | 78 | 9.080 | | 98 | 9.049 | |
| | | −25 | | | −18 | | | −9 | | | +7 |
| 39 | 9.771 | | 59 | 9.343 | | 79 | 9.071 | | 99 | 9.056 | |
| | | −26 | | | −18 | | | −8 | | | +7 |
| 40 | 9.745 | | 60 | 9.325 | | 80 | 9.063 | | 100 | 9.063 | |

Für $\Delta > 100°$ hat man mit dem Supplement als Argument in die Tafel einzugehen, z. B.

$$\log [0''.106\,(1 + 3\,\mathrm{cotg}^2\,107°)] = \log [0''.106\,(1 + 3\,\mathrm{cotg}^2\,73°] = 9.132\,.$$

Tafel V. $16''.59 \frac{\varrho\, \Pi_m''}{3422} \sin h_\varrho$. (Siehe pg. 11).

| $h_\varrho$ | $\varrho\, \Pi_m$ | | | | | | | | | | | $h_\varrho$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 3200 | 3250 | 3300 | 3350 | 3400 | 3450 | 3500 | 3550 | 3600 | 3650 | 3700 | |
| 4° | 1".08 | 1".10 | 1".12 | 1".13 | 1".15 | 1".17 | 1".18 | 1".20 | 1".22 | 1".23 | 1".25 | 4° |
| 6 | 1.63 | 1.65 | 1.68 | 1.70 | 1.72 | 1.75 | 1.77 | 1.80 | 1.82 | 1.85 | 1.88 | 6 |
| 8 | 2.16 | 2.19 | 2.23 | 2.26 | 2.29 | 2.33 | 2.36 | 2.40 | 2.43 | 2.46 | 2.50 | 8 |
| 10 | 2.69 | 2.74 | 2.78 | 2.82 | 2.86 | 2.91 | 2.95 | 2.99 | 3.03 | 3.07 | 3.12 | 10 |
| 12 | 3.22 | 3.28 | 3.33 | 3.38 | 3.43 | 3.48 | 3.53 | 3.58 | 3.63 | 3.68 | 3.73 | 12 |
| 14 | 3.75 | 3.81 | 3.87 | 3.93 | 3.99 | 4.05 | 4.11 | 4.16 | 4.22 | 4.28 | 4.34 | 14 |
| 16 | 4.28 | 4.34 | 4.41 | 4.48 | 4.54 | 4.61 | 4.68 | 4.74 | 4.81 | 4.88 | 4.94 | 16 |
| 18 | 4.80 | 4.87 | 4.94 | 5.02 | 5.09 | 5.17 | 5.24 | 5.32 | 5.39 | 5.47 | 5.54 | 18 |
| 20 | 5.31 | 5.39 | 5.47 | 5.55 | 5.64 | 5.72 | 5.80 | 5.89 | 5.97 | 6.05 | 6.13 | 20 |
| 22 | 5.81 | 5.90 | 5.99 | 6.08 | 6.17 | 6.26 | 6.36 | 6.45 | 6.54 | 6.63 | 6.72 | 22 |
| 24 | 6.31 | 6.41 | 6.51 | 6.61 | 6.70 | 6.80 | 6.90 | 7.00 | 7.10 | 7.20 | 7.30 | 24 |
| 26 | 6.80 | 6.91 | 7.01 | 7.12 | 7.23 | 7.33 | 7.44 | 7.54 | 7.65 | 7.76 | 7.86 | 26 |
| 28 | 7.28 | 7.40 | 7.51 | 7.62 | 7.74 | 7.85 | 7.97 | 8.08 | 8.19 | 8.31 | 8.42 | 28 |
| 30 | 7.76 | 7.88 | 8.00 | 8.12 | 8.24 | 8.36 | 8.48 | 8.61 | 8.73 | 8.85 | 8.97 | 30 |
| 32 | 8.22 | 8.35 | 8.48 | 8.61 | 8.74 | 8.86 | 8.99 | 9.12 | 9.25 | 9.38 | 9.51 | 32 |
| 34 | 8.67 | 8.81 | 8.95 | 9.08 | 9.22 | 9.35 | 9.49 | 9.62 | 9.76 | 9.90 | 10.03 | 34 |
| 36 | 9.12 | 9.26 | 9.40 | 9.55 | 9.69 | 9.83 | 9.97 | 10.12 | 10.26 | 10.40 | 10.54 | 36 |
| 38 | 9.55 | 9.70 | 9.85 | 10.00 | 10.15 | 10.30 | 10.45 | 10.60 | 10.75 | 10.89 | 11.04 | 38 |
| 40 | 9.97 | 10.13 | 10.28 | 10.44 | 10.60 | 10.75 | 10.91 | 11.06 | 11.22 | 11.37 | 11.53 | 40 |
| 42 | 10.38 | 10.54 | 10.70 | 10.87 | 11.03 | 11.19 | 11.35 | 11.52 | 11.68 | 11.84 | 12.00 | 42 |
| 44 | 10.78 | 10.94 | 11.11 | 11.28 | 11.45 | 11.62 | 11.79 | 11.96 | 12.12 | 12.29 | 12.46 | 44 |
| 46 | 11.16 | 11.33 | 11.51 | 11.68 | 11.86 | 12.03 | 12.21 | 12.38 | 12.55 | 12.73 | 12.90 | 46 |
| 48 | 11.53 | 11.71 | 11.89 | 12.07 | 12.25 | 12.43 | 12.61 | 12.79 | 12.97 | 13.15 | 13.33 | 48 |
| 50 | 11.88 | 12.07 | 12.26 | 12.44 | 12.63 | 12.81 | 13.00 | 13.18 | 13.37 | 13.56 | 13.74 | 50 |
| 52 | 12.22 | 12.42 | 12.61 | 12.80 | 12.99 | 13.18 | 13.37 | 13.56 | 13.75 | 13.95 | 14.14 | 52 |
| 54 | 12.55 | 12.75 | 12.94 | 13.14 | 13.34 | 13.53 | 13.73 | 13.92 | 14.12 | 14.32 | 14.51 | 54 |
| 56 | 12.86 | 13.06 | 13.26 | 13.46 | 13.67 | 13.87 | 14.07 | 14.27 | 14.47 | 14.67 | 14.87 | 56 |
| 58 | 13.16 | 13.36 | 13.57 | 13.77 | 13.98 | 14.18 | 14.39 | 14.60 | 14.80 | 15.01 | 15.21 | 58 |
| 60 | 13.44 | 13.65 | 13.86 | 14.07 | 14.28 | 14.49 | 14.70 | 14.91 | 15.12 | 15.33 | 15.54 | 60 |
| 62 | 13.70 | 13.91 | 14.13 | 14.34 | 14.55 | 14.77 | 14.98 | 15.20 | 15.41 | 15.63 | 15.84 | 62 |
| 64 | 13.94 | 14.16 | 14.38 | 14.60 | 14.81 | 15.03 | 15.25 | 15.47 | 15.68 | 15.91 | 16.12 | 64 |
| 66 | 14.17 | 14.39 | 14.62 | 14.84 | 15.06 | 15.28 | 15.50 | 15.72 | 15.94 | 16.17 | 16.39 | 66 |
| 68 | 14.38 | 14.61 | 14.83 | 15.06 | 15.29 | 15.51 | 15.73 | 15.96 | 16.18 | 16.41 | 16.64 | 68 |
| 70 | 14.58 | 14.81 | 15.03 | 15.26 | 15.49 | 15.72 | 15.94 | 16.17 | 16.40 | 16.63 | 16.86 | 70 |
| 72 | 14.76 | 14.99 | 15.22 | 15.44 | 15.68 | 15.91 | 16.14 | 16.37 | 16.60 | 16.83 | 17.06 | 72 |
| 74 | 14.91 | 15.15 | 15.38 | 15.61 | 15.85 | 16.08 | 16.31 | 16.54 | 16.78 | 17.01 | 17.24 | 74 |
| 76 | 15.05 | 15.29 | 15.52 | 15.76 | 15.99 | 16.23 | 16.46 | 16.69 | 16.93 | 17.17 | 17.41 | 76 |
| 78 | 15.17 | 15.41 | 15.65 | 15.89 | 16.12 | 16.36 | 16.60 | 16.83 | 17.07 | 17.31 | 17.55 | 78 |
| 80 | 15.27 | 15.51 | 15.76 | 15.99 | 16.23 | 16.47 | 16.71 | 16.95 | 17.19 | 17.43 | 17.67 | 80 |
| 82 | 15.36 | 15.60 | 15.84 | 16.08 | 16.32 | 16.56 | 16.80 | 17.04 | 17.28 | 17.52 | 17.76 | 82 |
| 84 | 15.43 | 15.67 | 15.91 | 16.15 | 16.39 | 16.63 | 16.88 | 17.12 | 17.36 | 17.60 | 17.84 | 84 |
| 86 | 15.48 | 15.72 | 15.96 | 16.20 | 16.44 | 16.68 | 16.93 | 17.17 | 17.41 | 17.65 | 17.90 | 86 |
| 88 | 15.50 | 15.75 | 15.99 | 16.23 | 16.47 | 16.71 | 16.96 | 17.20 | 17.44 | 17.68 | 17.93 | 88 |
| 90 | 15.51 | 15.76 | 16.00 | 16.24 | 16.48 | 16.73 | 16.97 | 17.21 | 17.45 | 17.70 | 17.94 | 90 |

## Tafeln zur Berechnung der Differentialrefraktion.

Tafel VI. $E = 1000 \dfrac{k_R' \sin 1''}{\sin^2 (h + \Delta h)}$.

| $h + \Delta h$ | $E$ | | $h + \Delta h$ | $E$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| 5° 0′ | 32.″75 | 1.89 | 13° 0′ | 5.″42 | 13 |
| 10 | 30.86 | 1.73 | 10 | 5.29 | 13 |
| 20 | 29.13 | 1.59 | 20 | 5.16 | 12 |
| 30 | 27.54 | 1.47 | 30 | 5.04 | 12 |
| 40 | 26.07 | 1.35 | 40 | 4.92 | 11 |
| 50 | 24.72 | 1.25 | 50 | 4.81 | 11 |
| 6 0 | 23.47 | 1.16 | 14 0 | 4.70 | 11 |
| 10 | 22.31 | 1.07 | 10 | 4.59 | 10 |
| 20 | 21.24 | 1.00 | 20 | 4.49 | 10 |
| 30 | 20.24 | 93 | 30 | 4.39 | 10 |
| 40 | 19.31 | 87 | 40 | 4.29 | 9 |
| 50 | 18.44 | 82 | 14 50 | 4.20 | 9 |
| 7 0 | 17.62 | 76 | 15° | 4.11 | 48 |
| 10 | 16.86 | 71 | 16 | 3.63 | 40 |
| 20 | 16.15 | 67 | 17 | 3.23 | 33 |
| 30 | 15.48 | 63 | 18 | 2.90 | 28 |
| 40 | 14.85 | 59 | 19 | 2.62 | 25 |
| 50 | 14.26 | 55 | 20 | 2.37 | 21 |
| 8 0 | 13.71 | 53 | 21 | 2.16 | 18 |
| 10 | 13.18 | 49 | 22 | 1.98 | 16 |
| 20 | 12.69 | 47 | 23 | 1.82 | 14 |
| 30 | 12.22 | 44 | 24 | 1.68 | 12 |
| 40 | 11.78 | 42 | 25 | 1.56 | 11 |
| 50 | 11.36 | 40 | 26 | 1.45 | 10 |
| 9 0 | 10.96 | 38 | 27 | 1.35 | 9 |
| 10 | 10.58 | 35 | 28 | 1.26 | 8 |
| 20 | 10.23 | 34 | 29 | 1.18 | 6 |
| 30 | 9.89 | 33 | 30 | 1.12 | 7 |
| 40 | 9.56 | 31 | 31 | 1.05 | 6 |
| 50 | 9.25 | 29 | 32 | 0.99 | 5 |
| 10 0 | 8.96 | 28 | 33 | 0.94 | 5 |
| 10 | 8.68 | 26 | 34 | 0.89 | 4 |
| 20 | 8.42 | 26 | 35 | 0.85 | 4 |
| 30 | 8.16 | 24 | 36 | 0.81 | 4 |
| 40 | 7.92 | 23 | 37 | 0.77 | 3 |
| 50 | 7.69 | 22 | 38 | 0.74 | 3 |
| 11 0 | 7.47 | 22 | 39 | 0.71 | 3 |
| 10 | 7.25 | 20 | 40 | 0.68 | 3 |
| 20 | 7.05 | 19 | 41 | 0.65 | 3 |
| 30 | 6.86 | 19 | 42 | 0.62 | 2 |
| 40 | 6.67 | 18 | 43 | 0.60 | 2 |
| 50 | 6.49 | 17 | 44 | 0.58 | 2 |
| 12 0 | 6.32 | 17 | 45 | 0.56 | 2 |
| 10 | 6.15 | 16 | 50 | 0.48 | 6 |
| 20 | 5.99 | 15 | 55 | 0.42 | 5 |
| 30 | 5.84 | 15 | 60 | 0.37 | 5 |
| 40 | 5.69 | 14 | 70 | 0.32 | 3 |
| 50 | 5.55 | 13 | 80 | 0.29 | 1 |
| 13 0 | 5.42 | | 90 | 0.28 | |

Tafel VI$^a$.

| Höhe | $\dfrac{\partial k_R}{\partial h}$ | | $\dfrac{\partial k_R'}{\partial h'}$ | |
|---|---|---|---|---|
| 5° 0′ | 0.″0374 | 64 | 0.″0321 | 57 |
| 30 | 310 | | 264 | |
| 6 0 | 0.0257 | 53 | 0.0218 | 46 |
| 30 | 214 | 43 | 181 | 37 |
| 7 0 | 0.0179 | 35 | 0.0150 | 31 |
| 30 | 152 | 27 | 126 | 24 |
| 8 0 | 0.0132 | 20 | 0.0108 | 18 |
| 30 | 113 | 19 | 93 | 15 |
| 9 0 | 0.0098 | 15 | 0.0081 | 12 |
| 30 | 86 | 12 | 71 | 10 |
| 10 0 | 0.0075 | 11 | 0.0062 | 9 |
| 11 0 | 58 | 17 | 47 | 15 |
| 12 0 | 46 | 12 | 37 | 10 |
| 13 0 | 37 | 9 | 30 | 7 |
| 14 0 | 30 | 7 | 24 | 6 |
| 15 0 | 0.0024 | 6 | 0.0020 | 4 |
| 16 0 | 20 | 4 | 17 | 3 |
| 17 0 | 17 | 3 | 15 | 2 |
| 18 0 | 15 | 2 | 13 | 2 |
| 19 0 | 13 | 2 | 11 | 2 |
| 20 0 | 0.0011 | 2 | 0.0009 | 2 |
| 21 0 | 9 | 2 | 7 | 1 |
| 22 0 | 7 | 2 | 6 | 1 |
| 23 0 | 5 | 2 | 5 | 1 |
| 24 0 | 3 | 2 | 4 | 0 |
| 25 0 | 0.0001 | | 0.0004 | |

$\dfrac{\partial k_R}{\partial h}$ und $\dfrac{\partial k_R'}{\partial h'}$ sind berechnet für 1 Bogenminute und mit dem Argument $h$ bez. $h'$ zu entnehmen.

Tafel VII. $0.''138 \left(\dfrac{\varrho\, \Pi_m''}{3422}\right)^2 (3 \sin^2 h_\varrho - 1)$. (Siehe pg. 11).

| $h_\varrho$ | $\varrho\, \Pi_m$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 3200 | 3300 | 3400 | 3500 | 3600 | 3700 |
| 5° | −0.″12 | −0.″13 | −0.″13 | −0.″14 | −0.″15 | −0.″16 |
| 10 | −0.11 | −0.12 | −0.12 | −0.13 | −0.14 | −0.15 |
| 15 | −0.10 | −0.10 | −0.11 | −0.12 | −0.12 | −0.13 |
| 20 | −0.08 | −0.08 | −0.09 | −0.09 | −0.10 | −0.10 |
| 25 | −0.06 | −0.06 | −0.06 | −0.06 | −0.07 | −0.08 |
| 30 | −0.03 | −0.03 | −0.03 | −0.04 | −0.04 | −0.04 |
| 35 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 40 | +0.03 | +0.03 | +0.03 | +0.03 | +0.04 | +0.04 |
| 45 | +0.06 | +0.06 | +0.07 | +0.07 | +0.08 | +0.08 |
| 50 | +0.09 | +0.10 | +0.10 | +0.11 | +0.12 | +0.12 |
| 55 | +0.12 | +0.13 | +0.14 | +0.15 | +0.15 | +0.16 |
| 60 | +0.15 | +0.16 | +0.17 | +0.18 | +0.19 | +0.20 |
| 65 | +0.18 | +0.19 | +0.20 | +0.21 | +0.22 | +0.24 |
| 70 | +0.20 | +0.21 | +0.22 | +0.24 | +0.25 | +0.27 |
| 75 | +0.22 | +0.23 | +0.25 | +0.26 | +0.27 | +0.29 |
| 80 | +0.23 | +0.25 | +0.26 | +0.28 | +0.30 | +0.31 |
| 85 | +0.24 | +0.25 | +0.27 | +0.29 | +0.30 | +0.32 |
| 90 | +0.24 | +0.26 | +0.27 | +0.29 | +0.31 | +0.32 |

Tafel VIII. (Siehe p. 13).

$$F = 1000 \frac{\partial k_R'}{\partial h'} \operatorname{cotg}(h + \Delta h).$$

| $h + \Delta h$ | $F$ | Diff. |
|---|---|---|
| 5° 0′ | 6″01 | |
| 10 | 5.50 | −51 |
| 20 | 5.00 | −50 |
| 30 | 4.56 | −44 |
| 40 | 4.17 | −39 |
| 50 | 3.81 | −36 |
| 6 0 | 3.47 | −34 |
| 10 | 3.16 | −31 |
| 20 | 2.88 | −28 |
| 30 | 2.62 | −26 |
| 40 | 2.40 | −22 |
| 50 | 2.20 | −20 |
| 7 0 | 2.04 | −16 |
| 10 | 1.89 | −15 |
| 20 | 1.74 | −15 |
| 30 | 1.60 | −14 |
| 40 | 1.49 | −11 |
| 50 | 1.38 | −11 |
| 8 0 | 1.28 | −10 |
| 10 | 1.19 | − 9 |
| 20 | 1.11 | − 8 |
| 30 | 1.04 | − 7 |
| 40 | 0.97 | − 7 |
| 50 | 0.90 | − 7 |
| 9 0 | 0.84 | − 6 |
| 10 | 0.79 | − 5 |
| 20 | 0.74 | − 5 |
| 30 | 0.69 | − 5 |
| 40 | 0.65 | − 4 |
| 50 | 0.61 | − 4 |
| 10 0 | 0.58 | − 3 |
| 11 0 | 0.42 | −16 |
| 12 0 | 0.30 | −12 |
| 13 0 | 0.21 | − 9 |
| 14 0 | 0.16 | − 5 |
| 15 0 | 0.13 | − 3 |
| 16 0 | 0.10 | − 3 |
| 17 0 | 0.08 | − 2 |
| 18 0 | 0.06 | − 2 |
| 19 0 | 0.05 | − 1 |
| 20 0 | 0.04 | − 1 |
| 25 0 | 0.02 | − 2 |
| 30 0 | 0.01 | − 1 |
| 35 0 | 0.01 | 0 |
| 40 0 | 0.00 | − 1 |

Tafel IX[a].

$w_1$ (in Einheiten der V. Dez.). (Siehe pg. 16).

| $h_\varrho$ | $\varrho\, \Pi_m$ 3200 | 3300 | 3400 | 3500 | 3600 | 3700 | $h_\varrho$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | + | + | + | + | + | + | |
| 4 | 84 | 86 | 88 | 90 | 91 | 93 | 4 |
| 6 | 138 | 141 | 145 | 148 | 152 | 156 | 6 |
| 8 | 192 | 197 | 202 | 207 | 213 | 219 | 8 |
| 10 | 246 | 253 | 260 | 267 | 274 | 282 | 10 |
| 12 | 300 | 308 | 317 | 326 | 335 | 344 | 12 |
| 14 | 354 | 364 | 374 | 384 | 395 | 406 | 14 |
| 16 | 407 | 419 | 431 | 443 | 455 | 467 | 16 |
| 18 | 460 | 473 | 487 | 500 | 514 | 528 | 18 |
| 20 | 513 | 528 | 543 | 558 | 573 | 588 | 20 |
| 22 | 565 | 581 | 597 | 614 | 631 | 648 | 22 |
| 24 | 616 | 634 | 652 | 670 | 688 | 707 | 24 |
| 26 | 666 | 686 | 706 | 726 | 746 | 766 | 26 |
| 28 | 715 | 736 | 758 | 780 | 802 | 824 | 28 |
| 30 | 764 | 787 | 810 | 834 | 858 | 882 | 30 |
| 32 | 812 | 837 | 862 | 887 | 912 | 938 | 32 |
| 34 | 859 | 885 | 911 | 937 | 964 | 992 | 34 |
| 36 | 905 | 933 | 961 | 989 | 1017 | 1045 | 36 |
| 38 | 950 | 979 | 1008 | 1037 | 1067 | 1097 | 38 |
| 40 | 993 | 1024 | 1055 | 1086 | 1117 | 1148 | 40 |
| 42 | 1036 | 1068 | 1100 | 1132 | 1164 | 1197 | 42 |
| 44 | 1078 | 1111 | 1144 | 1177 | 1210 | 1244 | 44 |
| 46 | 1118 | 1152 | 1186 | 1220 | 1255 | 1290 | 46 |
| 48 | 1156 | 1191 | 1227 | 1263 | 1299 | 1335 | 48 |
| 50 | 1192 | 1229 | 1266 | 1303 | 1341 | 1379 | 50 |
| 52 | 1227 | 1265 | 1304 | 1343 | 1382 | 1421 | 52 |
| 54 | 1261 | 1301 | 1341 | 1381 | 1421 | 1461 | 54 |
| 56 | 1294 | 1335 | 1376 | 1417 | 1458 | 1499 | 56 |
| 58 | 1326 | 1367 | 1409 | 1451 | 1493 | 1535 | 58 |
| 60 | 1356 | 1398 | 1440 | 1482 | 1525 | 1568 | 60 |
| 62 | 1383 | 1426 | 1469 | 1512 | 1556 | 1600 | 62 |
| 64 | 1409 | 1453 | 1497 | 1541 | 1585 | 1630 | 64 |
| 66 | 1433 | 1478 | 1523 | 1568 | 1613 | 1659 | 66 |
| 68 | 1455 | 1501 | 1547 | 1593 | 1640 | 1687 | 68 |
| 70 | 1476 | 1523 | 1570 | 1617 | 1664 | 1712 | 70 |
| 72 | 1494 | 1542 | 1590 | 1638 | 1686 | 1734 | 72 |
| 74 | 1510 | 1558 | 1607 | 1656 | 1705 | 1754 | 74 |
| 76 | 1525 | 1573 | 1623 | 1672 | 1722 | 1771 | 76 |
| 78 | 1539 | 1587 | 1637 | 1686 | 1736 | 1785 | 78 |
| 80 | 1551 | 1599 | 1649 | 1698 | 1748 | 1797 | 80 |
| 82 | 1560 | 1608 | 1658 | 1708 | 1758 | 1807 | 82 |
| 84 | 1567 | 1615 | 1665 | 1716 | 1766 | 1815 | 84 |
| 86 | 1572 | 1620 | 1670 | 1721 | 1771 | 1821 | 86 |
| 88 | 1575 | 1623 | 1673 | 1724 | 1775 | 1825 | 88 |
| 90 | 1575 | 1623 | 1674 | 1725 | 1776 | 1827 | 90 |

Tafel IX[b].

$w_2(1+\nu)$. (Siehe pg. 16).

| $h^0 + \Delta h_\varrho$ | $w_2(1+\nu)$ | Differenz I | Differenz II |
|---|---|---|---|
| 5° 0′ | −0.02483 | | |
| | | +324 | |
| 30 | 2159 | +260 | −64 |
| 6 0 | 1899 | +220 | −40 |
| 30 | 1679 | +188 | −32 |
| 7 0 | 1491 | +160 | −28 |
| 30 | 1331 | +135 | −25 |
| 8 0 | 1196 | +114 | −21 |
| 30 | 1082 | + 98 | −16 |
| 9 0 | 984 | + 86 | −12 |
| 30 | 898 | + 78 | − 8 |
| 10° | 820 | | |
| | | +126 | |
| 11 | 694 | +101 | −25 |
| 12 | 593 | + 80 | −21 |
| 13 | 513 | + 63 | −17 |
| 14 | 450 | + 53 | −10 |
| 15 | 397 | + 45 | − 8 |
| 16 | 352 | + 38 | − 7 |
| 17 | 314 | + 32 | − 6 |
| 18 | 282 | + 27 | − 5 |
| 19 | 255 | + 23 | − 4 |
| 20 | 232 | + 19 | − 4 |
| 21 | 213 | + 17 | − 2 |
| 22 | 196 | + 15 | − 2 |
| 23 | 181 | + 13 | − 2 |
| 24 | 168 | + 12 | − 1 |
| 25 | 156 | + 10 | − 2 |
| 26 | 146 | + 9 | − 1 |
| 27 | 137 | + 8 | − 1 |
| 28 | 129 | + 8 | 0 |
| 29 | 121 | + 6 | − 2 |
| 30 | 115 | | |
| 35 | 88 | + 27 | − 8 |
| 40 | 69 | + 19 | − 7 |
| 45 | 57 | + 12 | − 4 |
| 50 | 49 | + 8 | − 2 |
| 55 | 43 | + 6 | − 1 |
| 60 | 38 | + 5 | − 2 |
| 65 | 35 | + 3 | − 1 |
| 70 | 33 | + 2 | 0 |
| 75 | 31 | + 2 | − 1 |
| 80 | 30 | + 1 | 0 |
| 90 | −0.00029 | + 1 | |

## Berichtigung.

Seite 16, rechte Spalte, Zeile 2 von unten, statt: $W$ und Tafel IX[a] lies: $\mathfrak{W}$ und Tafel IX[b].

# Lebenslauf.

Ich, Hermann Julius Georg **Kurt Hessen,** evangelischen Glaubens, wurde am 2. Februar 1882 in Thorn als Sohn des Kgl. Preußischen Ingenieur-Offiziers John Hessen und seiner Ehefrau Martha, geb. Meister, geboren. Nach kurzer privater Vorbereitung trat ich Ostern 1891 in die Sexta des Gymnasiums zu Görlitz ein, das ich Ostern 1900 mit dem Zeugnis der Reife verließ. Ich studierte zwei Semester in Heidelberg und sechs Semester in Berlin Astronomie, Mathematik, Physik, Meteorologie und Philosophie und hörte die Vorlesungen folgender Herren Professoren und Dozenten:

Cantor, Fischer, Königsberger, Landsberg, Quincke, Valentiner, Wolf, Wolfrum in Heidelberg und

Battermann, Bauschinger, Dilthey, Foerster, Helmert, Knoblauch, Lehmann-Filhés, Marcuse, Planck, Scheiner, Schwarz, Stumpf in Berlin.

Vom fünften Semester ab nahm ich an den Seminar- und praktischen Übungen der Herren Foerster, Bauschinger, Battermann und Marcuse teil.

Allen diesen Herren spreche ich meinen aufrichtigsten Dank aus. Ganz besonders bin ich Herrn Prof. Foerster zu Dank verpflichtet für seine stets wohlwollende Förderung meines Studienganges und für vielfache Anregung und Unterstützung bei der Abfassung der vorliegenden Arbeit.

Die Promotionsprüfung bestand ich am 23. Juni 1904. Seit dem 15. Oktober 1902 war ich an der Königl. Sternwarte zu Berlin tätig, zunächst rechnerisch für Herrn Prof. Battermann, dem ich auch an dieser Stelle für sein gütiges Wohlwollen danke, von August 1904 ab beobachtete ich selbständig am großen Meridiankreise. Am 1. Juli 1905 trat ich beim Zentralbureau der Internationalen Erdmessung in Potsdam ein und verpflichtete mich, in den Jahren 1906 und 1907 Polhöhenbeobachtungen in West-Australien zu übernehmen.